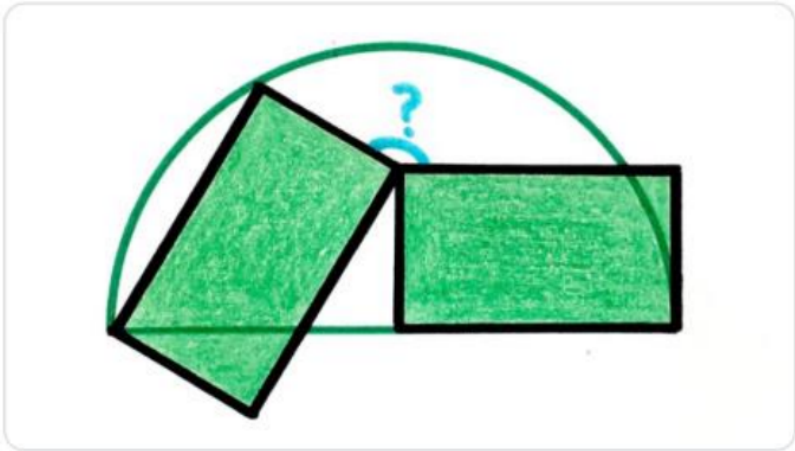


The two rectangles are congruent. What's the angle?



7 класс

Материалы занятий по геометрии и алгебре

Содержание

I Геометрия	4
Признаки равенства треугольников	
Первый признак равенства треугольников	5
Домашнее задание	7
Второй и третий признаки равенства треугольников	8
Второй и третий признаки равенства треугольников. Часть 2.	9
Домашнее задание	10
Равнобедренный треугольник	11
Аксиомы	12
Сумма углов треугольника	13
Сумма углов треугольника. Часть 2.	14
Признаки равенства прямоугольных треугольников	16
Параллельные прямые	
Параллельные прямые	19
Параллелограмм	21
Разные задачи	23
Ещё немного параллельности	24
Неравенства	
Неравенства треугольника. Часть первая.	25
Неравенства треугольника. Часть вторая. Теоретическая.	26
Неравенства треугольника. Часть третья. Практическая.	27
Прямоугольный треугольник и доп. построения	
Прямоугольный треугольник	28
Удвоение медианы (удвоение отрезка)	30
Параллелограмм. Удвоение медианы.	31
Задачи на построение	
Клеточки	32
Построение с помощью циркуля и линейки	34
Домашнее задание	35
Построение треугольников	36
Повторение	37
Знакомство с окружностью	
Знакомство с окружностью	39
Про котёнка	41
May the force be with you	42
Разнойой	44

Арифметика

Дроби	46
Дроби. Добавка.	47
Пропорции и отношения. Классная работа.	48
Пропорции и отношения. Домашняя работа.	49

Модуль

Модуль	50
Модули-2	51

Степени

Выражения со степенями	52
Выражения со степенями. Продолжение.	53

Раскрытие скобок

Умножение одночлена на многочлен	54
Раскрываем скобки	55
Продолжаем раскрывать скобки	56
Продолжаем раскрывать скобки. Дополнительные задачи.	57

Сворачивание скобок

Вынесение одночлена за скобки	58
Алгебраические преобразования. Повторение.	59
Десятичная запись.	60
Остатки	61
Сворачиваем скобки	62
Представьте в виде произведения трех скобок	63
Решите уравнение	64
Группировка	65
Группировка-3	66

Уравнения

Линейные уравнения	67
Линейные уравнения. Часть 2	69
Линейные уравнения. Домашнее задание к 19.11.2021	70
Линейные уравнения с модулем	71
Линейные уравнения с модулем. Часть 2	72
Уравнения с параметром	73
Текстовые задачи	74

Формулы сокращённого умножения

Формулы сокращённого умножения	76
Формулы сокращённого умножения	77
Разложение на множители с помощью формул сокращённого умножения	79
Формулы сокращённого умножения. Продолжение.	81
Упрощение выражений	83

Упрощение выражений. Часть 2.	84
Упрощение выражений. Часть 3.	85
Упрощение выражений. Часть 3.5.	86
Упрощение выражений. Практическая работа.	87
Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$	88
Алгебраические преобразования	89
Формулы сокращенного умножения. Обобщение.	90
Тренировочное домашнее задание	91

Графики

График линейной функции	92
График линейной функции. Продолжение.	93
Кусочно-линейные функции	94
Кусочно-линейные функции	95
Графики функций с модулями	96
Графики функций с модулями. Часть 2.	97
Изображение множеств решений уравнений.	98
Задачи с параметром	99
Параметр-2	100
Графики. Повторение.	101

Системы уравнений

Системы уравнений	102
Повторение	103
Системы уравнений	104
Системы уравнений	105
Системы уравнений	107
Системы уравнений	109
Решение задач с помощью систем уравнений	110
Множества на плоскости	111
Повторение	112
Уравнения в целых числах	113
Повторение	114

Часть I

Геометрия

Первый признак равенства треугольников

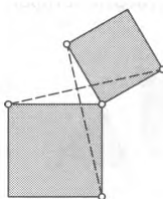
Просто равные треугольники

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD , если отрезок $AC = 10$?
2. Через середину отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB . Докажите, что каждая точка этой прямой одинаково удалена от точек A и B .
3. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ медианы, проведённые из вершин A и A_1 , равны.
4. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. На стороне AC отмечена точка X , а на стороне BC отмечена точка Y . Известно, что $AX = BY$. Докажите равенство треугольников
(а) CAU и CBX ;
(б) ABY и BAX .
5. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1 . Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
6. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Оказалось, что $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что $AD = BC$.
7. Все стороны и все углы в пятиугольнике равны. Докажите, что равны и все его диагонали.
8. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны, $AB = ED$, $BC = CD$. Докажите, что равны отрезки AD и BE .

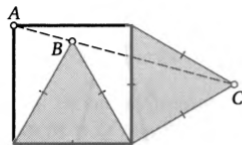
Квадраты и равносторонние треугольники

9. Докажите, что диагональ квадрата делит его угол пополам.
10. (а) На сторонах AB , BC и CA равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF . Точки D , E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.
(б) Стороны BA , AC и CB равностороннего треугольника продолжены соответственно за точки A , C и B , и на продолжениях отложены равные отрезки AD , CE и BF . Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.
11. Про пятиугольник $ABCDE$ известно, что ABC и ADE — равносторонние треугольники. Докажите, что $BD = CE$.

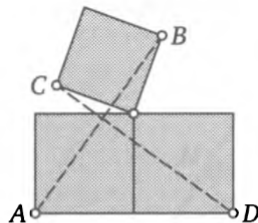
12. На рисунке изображены два квадрата. Докажите, что отмеченные отрезки равны.



13. Внутри и снаружи квадрата построены равносторонние треугольники. Докажите, что BC равняется диагонали квадрата.



14. На рисунке изображены три квадрата. Докажите, что $AB = CD$.



Интересные задачи

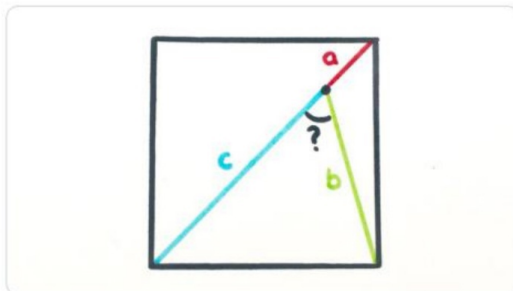
15. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что $BX = AY$. Чему может быть равна сумма $\angle ABY + \angle ACX$?
16. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K соответственно, а на стороне AC — точки E и M , причём

$$DA + AE = KC + CM = AB.$$

Докажите, что $DM = KE$.

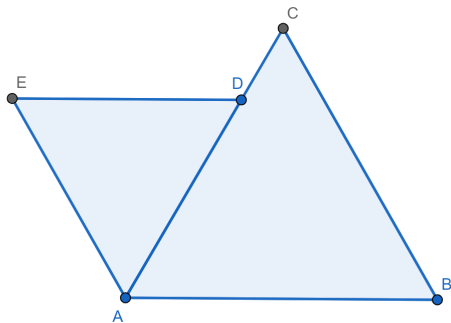
17. .

The point lies on the diagonal of the square so that $a + b = c$. What's the angle?

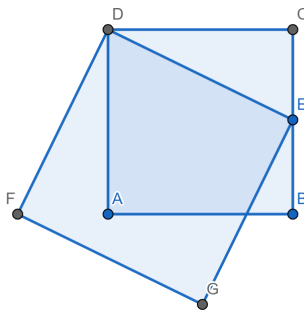


Домашнее задание

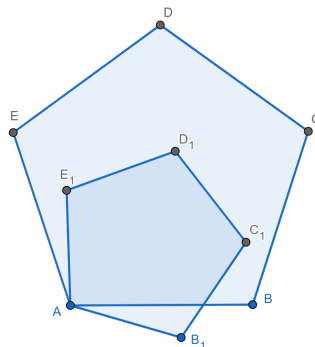
1. На рисунке изображены два равно-
сторонних треугольника.
Докажите, что $BD = EC$.



2. На рисунке изображены два квад-
рата.
(а) Докажите, что $AF = CE$.
(б) Докажите, что точки A, B, F ле-
жат на одной прямой.



3. На рисунке изображены два пя-
тиугольника. Все стороны и все
углы у каждого из них равны (но
пятиугольники не обязательно
равны между собой).
Докажите, что $BB_1 = EE_1$.



4. Даны два четырёхугольника: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,
 $CD = C_1D_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

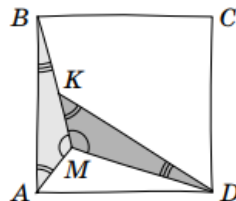
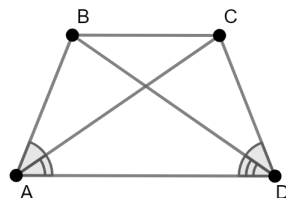
Второй и третий признаки равенства треугольников

Теория

- 0. Второй признак равенства треугольников.** Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 1. Равнобедренный треугольник.** В этой задаче НЕЛЬЗЯ делать дополнительные построения.
- (а) Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = BC$. Докажите, что $\angle A = \angle C$.
- (б) Дан треугольник ABC . Известно, что $\angle A = \angle C$. Докажите, что $AB = BC$.
- 2. (а)** Дан четырёхугольник $ABCD$, про который известно, что $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что $\angle A = \angle C$. (В этой задаче надо рассмотреть два случая: выпуклого и невыпуклого четырёхугольника.)
- (б) Сформулируйте и докажите **третий признак равенства треугольников**.

Задачи

- 3.** Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $\angle ABO = \angle OCD$, $BO = OC$. Докажите, что диагонали четырёхугольника равны.
- 4.** Дан четырёхугольник $ABCD$ (смотри рисунок). Известно, что $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CAD = \angle BDA$. Докажите, что $AB = CD$.
- 5.** Дан четырёхугольник $ABCD$, про который известно, что $AB = BC$, $AD = DC$. На диагонали BD взяли произвольную точку K . Докажите, что $AK = KC$.
- 6.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны равны и $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BAE$.
- 7.** Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите углы KMD и MKD .
- 8.** Точки M и N — середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Известно, что $AM = MD$, $BN = NC$. Докажите, что (а) $\angle MNA = 90^\circ$; (б) $AB = CD$.
- 9.** На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и K соответственно. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Оказалось, что $BM = BK$, $\angle BMC = \angle BKA$. Докажите, что периметр треугольника COK равен $AM + CM$.



Второй и третий признаки равенства треугольников.

Часть 2.

1. AE и KM — биссектрисы равнобедренного треугольника APK с основанием AK . Докажите, что треугольники APE и KPM равны.
2. На наибольшей стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM = AB$ и $CN = CB$ (точка N находится на отрезке AM). Докажите, что, если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.
3. Биссектриса BK треугольника ABC равна стороне AB . На продолжении отрезка BK за точку K отмечена точка L так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180^\circ$. Докажите, что $BL = BC$.
4. В треугольнике ABC взяли точку M так, что луч BM делит углы ABC и AMC пополам. Докажите, что данный луч перпендикулярен AC .
5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Кроме того, внутри него существует такая точка O , что $AO = OD$, $BO = CO$. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
6. На одной стороне угла с вершиной M взяли точки A и B , а на другой — C и D , причем отрезки BC и AD пересекаются в точке O . Известно, что $BO = OD$ и $\angle OBM = \angle ODM$. Докажите, что точка O принадлежит биссектрисе угла M .
7. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Докажите, что его диагонали делятся точкой пересечения пополам.
8. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle AMD = \angle CME$, где M — середина основания AC . Докажите, что $AE = CD$.
9. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$. Известно, что прямые AB и CD пересекаются в точке O . Докажите, что $AB = CD$.

Домашнее задание

1. Дан угол с вершиной O . На одной стороне этого угла лежат точки A и B , а на другой — C и D , причем $OA = OC$ и $AB = CD$. Отрезки AD и BC пересекаются в точке X . Докажите, что OX — биссектриса угла.
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Пусть M — середина AD , N — середина BC . Оказалось, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник AND — равнобедренный.
3. В океане расположено три острова A , B и C , причём расстояния от A до B и от B до C — по 50 км, а от A до C — 70 км. Одновременно из A в C отправилась яхта, а из C в B — катер, оба со скоростью 10 км/ч. Через два часа яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 20 км/ч. Докажите, что лодка и катер придут к яхте одновременно.
4. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка K . Отрезки KM и KP — биссектрисы треугольников AKB и AKC соответственно. Оказалось, что диагональ MK делит четырёхугольник $BMCK$ на два равных треугольника. Докажите, что M — середина AB .

Равнобедренный треугольник

Определение. Треугольник называется *равнобедренным*, если в нем две стороны равны. Это стороны называются боковыми, третья сторона — основание.

1. Свойства равнобедренного треугольника.

- (а) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
- (б) Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, совпадает с его высотой и биссектрисой.

2. Признаки равнобедренного треугольника.

- (а) Если в треугольнике $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.
- (б) Если в треугольнике медиана совпала с высотой, то он равнобедренный.
- (в) Если в треугольнике биссектриса совпала с высотой, то он равнобедренный.

Задачи

- 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM . На ней взята точка D . Докажите равенство треугольников: (а) ABD и CBD ; (б) AMD и CMD .
- 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K . Отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Оказалось, что $AO = CO$, $MO = KO$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 5. От вершины B равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , отложены равные отрезки: BA_1 на стороне BA , и BC_1 на стороне BC . Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке D . Докажите, что BD — биссектриса угла B .
- 6. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого, а также равны их высоты, проведенные к третьим сторонам. Верно ли, что эти два треугольника равны?
- 7. Докажите, что если в треугольнике биссектриса совпала с медианой, то он равнобедренный.
- 8. В треугольнике ABC провели медиану BM . Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM . Найдите отношение медианы BM к стороне BC .
- 9. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что CEM равен углу ABM . Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.
- 10. Докажите, что два треугольника равны по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Аксиомы



1. Аксиомы принадлежности

- Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие ей и не принадлежащие ей.
- Через любые две точки можно провести прямую и притом только одну.

2. Аксиомы расположения

- Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

3. Аксиомы измерения

- Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.
- Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180° . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

4. Аксиомы откладывания.

- На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины и притом только один.
- От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол, с заданной градусной мерой, меньшей 180° и притом только один.
- Каков бы ни был треугольник, существует треугольник, равный ему, в заданном расположении относительно данной полупрямой.



5. Аксиома параллельности.

(Пятый постулат) Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

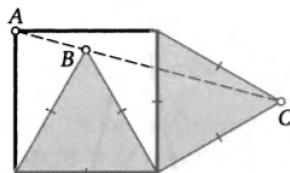
Сумма углов треугольника

Теорема. Сумма углов треугольника равняется 180° .

1. Один угол равнобедренного треугольника в два раза больше другого. Найдите углы треугольника.
2. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75° . Определите угол при основании треугольника.

Определение. Многоугольник называется *выпуклым*, если каждый его внутренний угол меньше 180° .

3. Найдите сумму углов выпуклого
 - (а) четырёхугольника; (б) пятиугольника; (в) n -угольника.
4. Один угол шестиугольника прямой (равен 90°), а все другие равны между собой. Найдите величину этих углов.
5. Найдите сумму внешних углов выпуклого
 - (а) четырёхугольника; (б) пятиугольника; (в) n -угольника.
6.
 - (а) На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка X . Оказалось, что $AX = BX = CX$. Найдите углы треугольника.
 - (б) На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка X . Оказалось, что $BX = AX = AC$. Найдите углы треугольника.
 - (в) На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка X . Оказалось, что $AX = BX, BC = XC$. Найдите углы треугольника.
7. Точки M, A, C, K лежат на одной прямой (именно в такой порядке). Выбрана точка B так, что $MA = AB, BC = CK$. Найдите $\angle MBK$, если известно, что $\angle ABC = 36^\circ$.
8. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A . На стороне AB взята такая точка D , что $BD = BC$. Найдите CD , если $AD = 4$.
9. Внутри квадрата $ABCD$ построили равносторонний треугольник AED .
 - (а) Найдите угол BEC .
 - (б) Диагональ AC пересекает его сторону ED в точке F . Верно ли, что треугольник CEF равнобедренный?
10. Внутри и снаружи квадрата построены равносторонние треугольники. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.



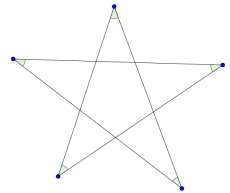
Сумма углов треугольника. Часть 2.

Упражнения

1. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.
2. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
3. Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом?
4. Высоты треугольника ABC , проведённые из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.
5. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE , опущенные на боковые стороны, образуют угол AMC , равный 48° . Найдите углы треугольника ABC .
6. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC , CD — биссектриса угла C , $\angle ADC = 150^\circ$. Найдите $\angle B$.
7. В Дан треугольник ABC . Про него известно, что все три биссектрисы его углов пересекаются в одной точке. Кроме этого, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Найдите углы шести треугольников, на которые данный треугольник разбивается его биссектрисами.
На самом деле в любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, но мы с вами ещё не умеем это доказывать.
8. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
9. BK — биссектриса треугольника ABC . Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC .
10. Два угла треугольника равны 10° и 70° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.
11. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок $AD = AB$, а за точку C — отрезок $CE = CB$. Найдите углы треугольника DBE , если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.
12. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

Задачи

13. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.
14. В треугольнике DEF проведена медиана DK . Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70^\circ$, $\angle DKF = 140^\circ$.
15. (а) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M такая, что $BM = MC$. Докажите, что $AM = MC$.
(б) В треугольнике ABC проведена медиана BM . Оказалось, что $AM = BM = CM$. Докажите, что треугольник прямоугольный.
16. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C , а в треугольнике ACK — биссектриса CE . Докажите, что $CB = BE$.
17. В треугольнике ABC угол A равен α .
(а) Высоты углов B и C пересекаются в точке H . Чему равен $\angle BHC$?
(б) Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I . Чему равен $\angle BIC$?
18. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C , — в точке K , причём $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC .
19. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD$. Известно, что лучи AB и DC пересекаются в точке O , $\angle BOC = 80^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.
20. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Прямые AB и CD пересекаются в точке X , а прямые BC и AD пересекаются в точке Y . Докажите, что биссектрисы углов BXC и CYD перпендикулярны.
21. Посчитайте сумму отмеченных углов у пятиконечной звезды.



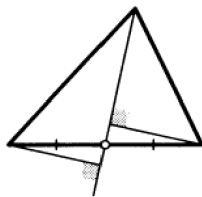
Признаки равенства прямоугольных треугольников

Формулировки признаков равенства

- Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (**по двум катетам**).
- Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (**по катету и острому углу**).
- Если катет и противолежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (**по катету и острому углу**).
- Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (**по гипотенузе и острому углу**).
- Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (**по гипотенузе и катету**).

1. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. (а) Две высоты треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный.
(б) Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.
3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, $AB = CD$. Докажите, что $AO = OD$.
4. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин B и C пересекаются в точке M . Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
5. (а) На биссектрисе угла отметили произвольную точку. Докажите, что эта точка находится на одинаковых расстояниях от сторон угла.
(б) Внутри угла нашлась точка, расстояния от которой до сторон угла равны. Докажите, что эта точка лежит на биссектрисе угла.
(в) В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке I . Докажите, что луч CI является биссектрисой угла C .
*В школьном учебнике точка I называется **точкой пересечения биссектрис**. Ещё эту точку называют **инцентр**.*

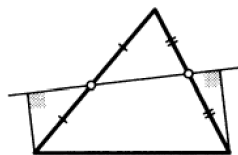
6. Медиана разбивает треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что высоты этих треугольников, проведенные к этой медиане, равны.



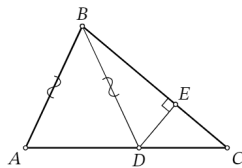
7. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M , причём $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная прямой AC и пересекающая BC в точке H . Докажите, что $BH = HM = MC$.

Нужно придумать, где провести высоту

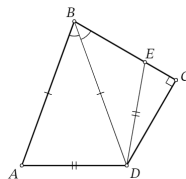
8. Прямая проходит через середины двух сторон треугольника. Докажите, что высоты, опущенные на неё из концов третьей стороны треугольника, равны.



9. Точки D и E отмечены на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно. Известно, что $AB = BD$, $\angle ABD = 46^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$. Найдите $\angle BDE$, если известно, что $2DE = AD$.



10. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BCD = 90^\circ$. На отрезке BC отмечена точка E такая, что $AD = DE$. Чему равна длина отрезка BD , если известно, что $BE = 7$, $EC = 5$?

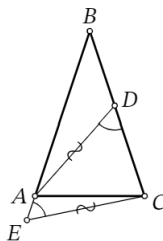


11. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключённые внутри квадрата, равны.
12. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EM + FN = AB$.
13. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M , а на продолжении стороны AC за точку C — точка N , причём $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

14. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На луче BA за точкой A отмечена точка E , на стороне BC отмечена точка D . Известно, что

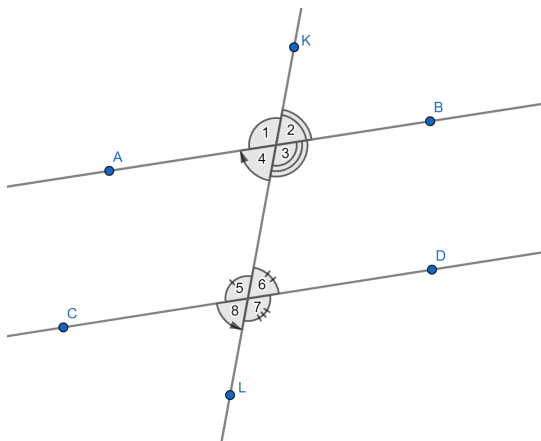
$$\angle ADC = \angle AEC = 60^\circ, AD = CE = 13.$$

Найдите длину отрезка AE , если $DC = 9$.



Параллельные прямые

Определение. Прямая KL называется *секущей* для прямых AB и CD .



Немного теории

0. Накрест лежащие углы.

(а) Если $AB \parallel CD$, то $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$.

(б) Если выполнено любое из равенств $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$, то $AB \parallel CD$.

1. Соответственные углы.

(а) Если $AB \parallel CD$, то $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 5$.

(б) Если выполнено любое из равенств $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 5$, то $AB \parallel CD$.

2. Односторонние углы.

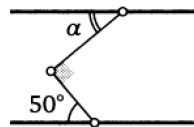
(а) Если $AB \parallel CD$, то $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$, $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$.

(б) Если выполнено любое из равенств $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$, $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$, то $AB \parallel CD$.

Упражнения

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Докажите, что $\angle A = \angle C$.
4. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
5. Через точку M , лежащую внутри угла с вершиной A , проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C . Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM , равен 40° . Найдите углы треугольников BMC и ABC .

6. AD — биссектриса треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AB , причём $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.
7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Докажите, что $AB = CD$.
8. Сторона прямого угла образует с одной из параллельных прямых угол 50° . Какой угол образует вторая сторона этого угла с другой параллельной прямой?



9. В пятиугольнике $ABCDE$ $BC \parallel AE$. Известно, что $\angle DBC = 15^\circ$, $\angle BDE = 70^\circ$. Найдите $\angle AED$.

Задачи

10. В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC отмечена точка E , а на стороне AD отмечена точка F . Оказалось, что AE и CF — биссектрисы углов A и C соответственно, кроме этого $AE \parallel CF$. Докажите, что углы B и D равны.
11. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I . Через точку I проходят две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E . Докажите, что периметр треугольника IED равен отрезку BC .
12. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке P . Перпендикуляр к BP , проходящий через точку A , пересекает сторону BC в точке Q . Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.
13. У шестиугольника две пары противоположных стороны попарно равны и параллельны. Докажите, что оставшиеся стороны также равны и параллельны.

Домашнее задание

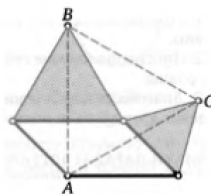
14. Дан угол с вершиной A . От точки A отложен на стороне отрезок AB ; из точки B проведена прямая, параллельная второй стороне данного угла; на этой прямой отложен внутри угла отрезок BD , равный BA . Докажите, что прямая AD делит данный угол пополам.
15. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , причём $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN , если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.
16. Прямая, проведённая через вершину C треугольника ABC параллельно его биссектрисе BD , пересекает продолжение стороны AB в точке M . Найдите углы треугольника MBC , если $\angle ABC = 110^\circ$.
17. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E , а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.
18. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D ; прямая, проведённая через точку D параллельно CA , пересекает сторону AB в точке E ; прямая, проведённая через точку E параллельно BC , пересекает сторону AC в F . Докажите, что $EA = FC$.

Параллелограмм

Определение. Параллелограмм — это четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны.

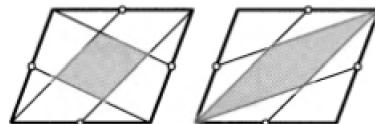
- Свойства параллелограмма.** Докажите, что у параллелограмма
 - противоположные стороны параллелограмма равны;
 - противоположные углы параллелограмма равны;
 - диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- Признаки параллелограмма.** Докажите, что если у четырёхугольника **(а)** противоположные стороны попарно равны;
 - противоположные углы попарно равны;
 - диагонали в точке пересечения делятся пополам;
 - две противоположные стороны равны и параллельны;
 то этот четырёхугольник является параллелограммом.
- Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $AB \parallel CD$, $AO = OC$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?
- Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?
- Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB \parallel CD$, $BC = AD$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?
- Биссектрисы двух углов при одной стороне параллелограмма делят другую сторону на три равные части. Найдите отношение сторон параллелограмма. *Не забудьте рассмотреть все случаи!*

- На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что ABC — равносторонний треугольник.

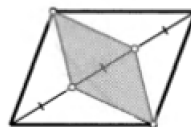


- Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM . Докажите, что $BC_1 = B_1C$.

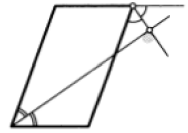
- На рисунке справа отмечены середины сторон большого параллелограмма. Докажите, что заштрихованные четырёхугольники — параллелограммы.



- Диагональ параллелограмма поделили на три равные части. Докажите, что заштрихованная фигура — параллелограмм.

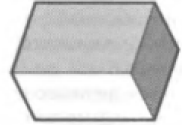


11. Докажите, что биссектриса внутреннего угла параллелограмма перпендикулярна внешней биссектрисе противоположного угла параллелограмма.

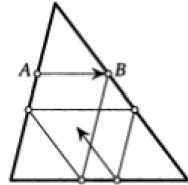


12. В выпуклом шестиугольнике противоположные углы попарно равны. Докажите, что в этом шестиугольнике противоположные стороны попарно параллельны.

13. Шестиугольник удалось разбить на три параллелограмма (см. рисунок). Докажите, что это шестиугольник можно другим способом разбить на три параллелограмма.



14. Из произвольной точки A , взятой на стороне треугольника и не являющейся серединой стороны, проводится прямая, параллельная другой его стороне и пересекающая третью сторону в точке B . Далее процесс повторяется. Получается ломаная. Верно ли, что она замкнётся?



15. **Теорема о расстоянии между параллельными прямыми.** Даны две параллельные прямые — a и b . На прямой a выбрана точка A , а на прямой b — точка B так, что $AB \perp b$ (и, как следствие, $AB \perp a$). Докажите, что длина отрезка AB не зависит от расположения точки A . Длина отрезка AB называется расстоянием между параллельными прямыми a и b .
16. На основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка X . На стороне AB выбрана точка Y , а на стороне BC — точка Z , причём $\alpha = \angle BYX = \angle BZX$. Докажите, что $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X , если (а) $\alpha = 90^\circ$; (б) $\alpha = 91^\circ$.
17. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K , вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L . Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм.
18. Все углы шестиугольника равны. Докажите, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

Разные задачи

1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ AC делит угол A пополам. Серединный перпендикуляр к AC пересекает AD в точке K . Докажите, что $CK = BC$.
2. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке E . Докажите, что $BC = ED + CD$.
3. Из внешнего угла C параллелограмма $ABCD$ провели биссектрису ℓ_1 . Из точки A провели прямую ℓ_2 перпендикулярную ℓ_1 . Докажите, что ℓ_2 отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник.
4. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, параллельная AB , пересекает биссектрисы углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что углы ADP и ABQ равны.
5. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и B , пересекающие сторону CD в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1C = B_1D$.
6. В треугольнике ABC $AC = 4$, $AB = 5$, I — точка пересечения биссектрис углов B и C . Отрезок, проходящий через точку I параллельно стороне BC , пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM .
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла C пересекает прямую BA в точке M . Перпендикуляр из точки B на прямую CM пересекает CD в точке N . Оказалось, что $MN = BC$. Докажите, что $BM = CN$.
8. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.
9. Про трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $2BC = 2AB = AD$. Докажите, что $\angle ACD = 90^\circ$.
10. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.
11. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

Ещё немного параллельности

1. В пятиугольнике $ABCDE$ $BC \parallel AE$. Известно, что $\angle BCD = 100^\circ$, $\angle DAE = 25^\circ$. Найдите $\angle CDA$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A . На лучах AB и CB отмечены точки H и K соответственно, причём $CH = BC$ и $AK = AB$. Докажите, что $DH = DK$.
3. На прямой лежат три точки A, B, C (именно в этом порядке). X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. Точка Z такая, что $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$. *Надо рассмотреть все случаи!*
4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL — правильный.
5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB и CD равны и параллельны, сторона DE параллельна диагонали AC , а угол BCE прямой. Докажите, что EC — биссектриса угла BED .
6. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD , P — точка пересечения отрезков DM и BN . Докажите, что угол MAN равен углу BPM .
7. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры также образуют квадрат.

Неравенства треугольника. Часть первая.

Теорема. В треугольнике против большей стороны треугольника лежит больший угол. А против большего угла треугольника лежит большая сторона.

1. (а) Доказательство первой части теоремы.

Дан треугольник ABC , в котором $\angle A > \angle B$. Отметим на луче CB такую точку X , что

$$\angle CAX = \frac{\angle A + \angle B}{2}.$$

Осознайте, что точка X попала на отрезок BC , и докажите, что $BC > AC$.

(б) Доказательство второй части теоремы.

Дан треугольник ABC , в котором $BC > AC$. Отметим на стороне CB такую точку X , что $AC = CX$. Докажите, что $\angle A > \angle B$.

- В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол при вершине A .
- На основании AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена произвольная точка X . Докажите, что $BX < BC$.
- В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BH . Докажите, что если $AB > BC$, то $AH > HC$.
- В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Докажите, что если $HC < AH$, то $\angle C > \angle A$ (отметьте на HA такую точку X , что $HC = HX$).
- (а) Докажите, что основание высоты треугольника, проведённой из вершины наибольшего угла, лежит на стороне треугольника (а не на её продолжении).
(б) Докажите, что основания высот остроугольного треугольника лежат на сторонах треугольника (а не на их продолжениях).
В обоих пунктах этой задачи надо рассуждать от противного.
- В треугольнике ABC проведена высота BH .
(а) Докажите, что если $AH > HC$, то $AB > BC$ (стоит вспомнить про задачу 5).
(б) Докажите, что если $AB > BC$, то $AH > HC$.
Не забывайте, что треугольники бывают не только остроугольные!
- В треугольнике ABC проведена медиана BM .
(а) Докажите, что если $\angle AMB > \angle CMB$, то $AB > BC$ (стоит провести высоту BH и воспользоваться задачей 5).
(б) Докажите, что если $AB > BC$, то $\angle AMB > \angle CMB$ (рассуждения от противного!).
- В треугольнике ABC провели медиану BM . Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM .
- Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ делит пополам диагональ BD . Известно, что $AB > AD$. Какой угол больше: BCA или DCA ?

Неравенства треугольника. Часть вторая. Теоретическая.

0. Даны три отрезка, чьи длины равны a, b, c . Докажите, что если $a + b > c$ и $|a - b| < c$, то из этих отрезков можно построить треугольник. *Задачу ноль решать не надо.*
1. Даны три отрезка, чьи длины равны a, b, c . Докажите, что если $a + b > c$, $a + c > b$ и $b + c > a$, то из этих отрезков можно построить треугольник. *Эту задачу надо вывести из задачи ноль.*

Теорема. Для любых трёх точек A, B, C выполнено неравенство $AC \leq AB + BC$. Причём равенство достигается только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC .

2. Доказательство теоремы.

- (а) Докажите теорему для случая, когда точки A, B, C лежат на одной прямой.
- (б) Рассмотрим случай, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой. Отложим на луче AB за точкой B точку D так, что $BD = BC$. Докажите, что $\angle ADC < \angle ACD$.
- (в) Докажите теорему для случая, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой.

3. Докажите, что в треугольнике ABC верно неравенство $|AB - BC| < AC$.

4. Прямой путь короче, чем любой другой.

- (а) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $AD < AB + BC + CD$.
- (б) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Докажите, что

$$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

- (в) Дана произвольная ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Докажите, что

$$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

Определение. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

5. Из точки A опустили перпендикуляр AH на прямую ℓ . Также на этой прямой отмечена произвольная точка B , не совпадающая с точкой H .
 - (а) Докажите, что $AB > AH$.
 - (б) На плоскости отмечена C точка. Докажите, что $AC + CB > AH$.
 - (в) На плоскости отмечено несколько точек: X_1, X_2, \dots, X_n . Докажите, что

$$AH < AX_1 + X_1X_2 + \dots + X_{n-1}X_n + X_nB.$$

Неравенства треугольника. Часть третья. Практическая.

1. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 5, а другая 12. Найдите периметр треугольника.
2. Одна сторона треугольника равна 4, а длины двух других его сторон относятся как 3 : 5. Докажите, что периметр треугольника меньше 20.
3. У Пети есть пять палочек, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5. Сколько различных треугольников он может из них составить?
4. Разность боковых сторон треугольника равна 2, а его основание в три раза больше меньшей из них. Докажите, что периметр треугольника больше 5.
5. Внутри треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника больше половины его периметра.
6. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбрали точку X . Докажите, что $BX > AB/2$.
7. Отрезки AC и BD пересекаются. Докажите, что $AB + CD < AC + BD$.
8. Дан треугольник ABC .
 - (а) На стороне BC отмечена точка D . Докажите, что $AD + DC \leq AB + BC$.
 - (б) Внутри треугольника ABC отмечена точка D . Докажите, что $AD + DC \leq AB + BC$.
9. Докажите, что сумма длин всех диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.
10. Докажите, что сумма диагоналей любого четырехугольника меньше его периметра.
11. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM . Докажите, что
 - (а) $2BM < AB + BC$;
 - (б) $2BM > AB$.

Прямоугольный треугольник

Теория

1. Признак прямоугольного треугольника.

В треугольнике ABC проведена медиана BM . Оказалось, что $AM = BM = CM$. Докажите, что $\angle B = 90^\circ$.

2. Свойство прямоугольного треугольника.

В прямоугольном треугольнике медиана равняется половине гипотенузы (для доказательства этого факта стоит удвоить медиану).

3. Прямоугольный треугольник с углом 30° .

(а) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B угол A равен 30° . Докажите, что $AC = 2BC$.

(б) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B гипотенуза AC в два раза больше катета BC . Докажите, что $\angle A = 30^\circ$.

Задачи

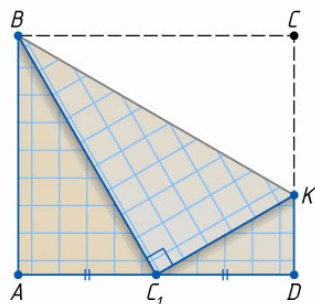
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN , а Q — середина стороны AC . Докажите, что треугольник MNQ — равнобедренный.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C можно провести два отрезка, разбивающих угол C на углы, равные $\angle A$ и $\angle B$. Докажите, что один из них — это медиана, а другой — высота.

6. Найдите углы треугольника ABC , в котором $AB = BC$, а высота AH вдвое короче биссектрисы AK .

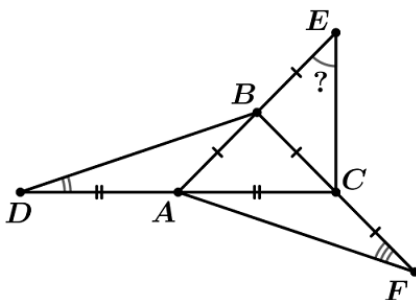
7. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол B равен 60° . Докажите, что $AH = 3HB$, где CH — высота треугольника.

8. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $DK : AB$, если C_1 — середина AD .



9. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30° , $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC . Найдите BE .

10. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC . На лучах CA , AB и BC отмечены соответственно точки D , E и F так, что $AD = AC$, $BE = BA$, $CF = CB$. Найдите угол BEC , если $\angle BDA = 25^\circ$, $\angle CFA = 31^\circ$.



11. Нешкольное свойство прямоугольного треугольника.

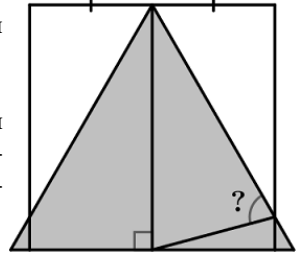
В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отмечена точка M так, что $AM = MC$. Докажите, что CM — медиана.

12. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . На катете BC отмечена точка D такая, что $\angle CAD = \angle ABC$. Докажите, что CH делит отрезок AD пополам.

13. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, вчетверо короче гипотенузы. Найдите углы этого треугольника.

14. На рисунке изображены квадрат и равносторонний треугольник. Найдите величину отмеченного угла.

15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке H . Пусть M — середина AC , а N — середина BH . Докажите, что MN перпендикулярен A_1C_1 .

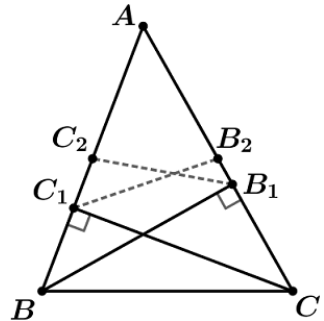


Домашнее задание

16. В треугольнике ABC угол A тупой, а перпендикуляры к сторонам AB и AC , восстановленные в точке A , делят сторону BC на три равные части. Найдите углы треугольника ABC .

17. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведённая из той же вершины.

18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 , а точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Выразите угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2 через $\angle A = \alpha$.



19. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол B равен 60° . Найдите отношение $AH : HC$, где H — точка пересечения серединного перпендикуляра к гипотенузе с катетом AC .

20. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$. Чему равна длина отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC , если $AD = 12$, $BC = 7$?

Удвоение медианы (удвоение отрезка)

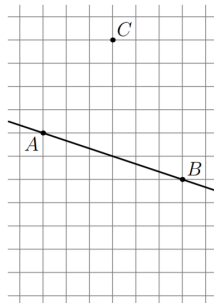
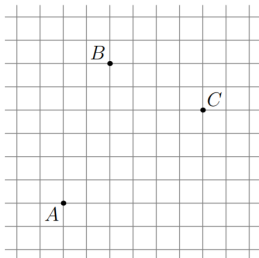
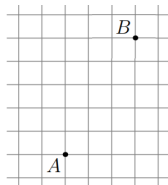
1. В треугольнике ABC провели медиану BM . Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM . Найдите отношение медианы BM к стороне BC .
2. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что CEM равен углу ABM . Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.
3. Медиана треугольника образует с его сторонами, выходящими из той же вершины, углы 40° и 70° . Докажите, что эта медиана равна половине одной из сторон треугольника.
4. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E . Прямая AE пересекает сторону BC в точке K . Оказалось, что $\angle BEK = \angle BKE$. Найдите BC , если $BE = 5, EM = 2$.
5. На сторонах AB и BC во вне построили квадраты $ABKL$ и $CBNT$. Доказать, что отрезок KN в два раза больше медианы BM треугольника ABC .
6. **Важный факт.** На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена середина — точка M . На луче AM за точкой M отметили точку X такую, что $AM = MX$. Докажите, что точка X лежит на прямой BC .
7. Биссектриса одного угла трапеции делит ее боковую сторону пополам. Найдите другую боковую сторону трапеции, если основания трапеции a и b .
8. Середина боковой стороны трапеции равноудалена от двух противоположных от нее вершин. Докажите, что трапеция прямоугольная.
9. Высота AN остроугольного треугольника ABC равна его медиане BM . Найдите $\angle MBC$.
10. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена середина M . Найдите отношение сторон параллелограмма, если известно, что $\angle AMD = 90^\circ$.
11. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. Точка K делит его сторону BC на отрезки с длинами a и b так, что $\angle AMK = 90^\circ$. Найдите AK .
12. Вершину тупого угла A параллелограмма $ABCD$ соединили с точкой M — серединой его стороны CD . Высота CH параллелограмма пересекает отрезок AM в точке F . Найдите BF , если $AF = a, FM = b$.

Параллелограмм. Удвоение медианы.

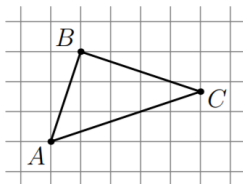
1. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису внешнего угла при вершине A параллелограмма $ABCD$, при пересечении с прямыми BC и CD образует равнобедренный треугольник, сумма длин боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.
2. В равнобокой трапеции меньший угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.
3. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно, а внутри треугольника точка M так, что четырехугольник $DCEM$ является параллелограммом и $DE \parallel AB$. Прямая DM пересекает отрезок AB в точке K , а прямая EM — в точке H . Докажите, что $AK = HB$.
4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Точка P такова, что $DOCP$ — тоже параллелограмм (CD — его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC , а через R — точку пересечения DQ и CP . Докажите, что $PC = CR$.
5. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K , что $AK = BM$. Кроме того $\angle AMC = 60^\circ$. Докажите, что $AC = BK$.

Клеточки

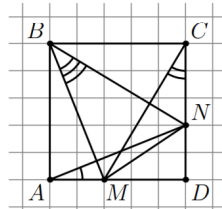
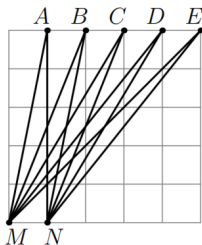
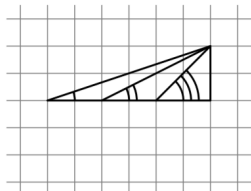
1. (а) Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB .
- (б) Постройте центр окружности, проходящей через точки A , B и C .
- (в) Постройте точку, симметричную точке C относительно прямой AB .



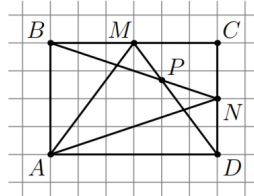
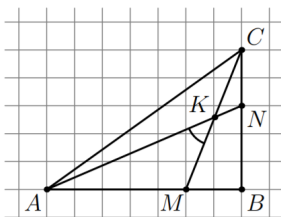
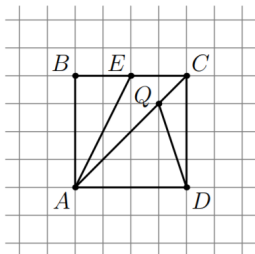
2. Постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.
3. Постройте центр окружности, вписанной в треугольник ABC .



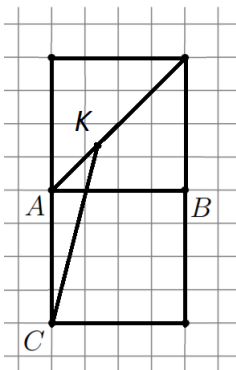
4. (а) Найдите сумму трех углов, обозначенных на рисунке ниже.
- (б) Найдите сумму пяти углов: MAN , MBN , MCN , MDN и MEN .
- (в) От квадрата $ABCD$ «отрезали» прямоугольный треугольник MND . Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A , B и C видна его гипотенуза.



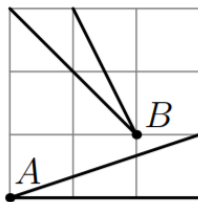
5. (а) Найдите угол между прямыми AE и DQ .
 (б) Найдите угол AKM .
 (в) Докажите, что углы MAN и BPM равны.



6. Два квадрата на рисунке имеют общую сторону AB . На диагонали одного из них отметили точку K , расстояние от которой до вершины C другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол ACK .



7. Не выходя за пределы листа размера 3×3 , докажите равенство углов A и B .



Построение с помощью циркуля и линейки

Элементарные построения

1. Постройте треугольник, стороны которого равнялись бы трём данным сторонам. Когда это возможно?
2. От данного луча в заданную полуплоскость отложите угол, равный данному.
3. Дан отрезок, постройте к нему серединный перпендикуляр.
4. Даны прямая и точка. Постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку.
5. Постройте биссектрису данного угла.
6. Даны прямая и точка. Постройте через данную точку прямую, параллельную данной.

Задачи

1. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$ по четырём сторонам и углу A .
2. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.
3. Через данную точку проведите прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.
4. Постройте на данной прямой точку, равноудалённую от двух данных точек.
5. Постройте на данной окружности точку, которая находилась бы на данном расстоянии от данной прямой.
6. Постройте параллелограмм по стороне и диагоналям.
7. Постройте прямую, равноудалённую от трёх данных точек.
8. Постройте угол равный 105° .
9. Дан угол в 19° . Как построить с его помощью угол в 1° ?
- 10.* На одной из сторон острого угла лежит точка A . Постройте на этой же стороне угла точку, равноудалённую от второй стороны угла и от точки A .
- 11.* Внутри произвольного угла взята точка M . Проведите через точку M прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между сторонами угла, делился бы точкой M пополам.
- 12.* Постройте выпуклый четырёхугольник по серединам его трёх равных сторон.
- 13.* Постройте на сторонах AB и BC треугольника ABC точки соответственно X и Y так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.

Домашнее задание

Все ссылки надо открывать в браузере на компьютере (на телефоне или планшете они могут не открыться).

1. Постройте угол 60° с заданной стороной.
<https://clck.ru/dVoXZ>
3. Постройте ромб с данной стороной и углом 45° при вершине.
<https://clck.ru/dVofo>
5. Постройте квадрат по двум заданным серединам противоположных сторон.
<https://clck.ru/dVojpg>
7. Постройте правильный шестиугольник с заданной стороной.
<https://clck.ru/dVoqD>
9. Постройте прямую через точку C , проходящую между точками A и B и лежащую на равном расстоянии от них.
<https://clck.ru/dVowe>
2. Постройте угол 30° с заданной стороной.
<https://clck.ru/dVodh>
4. Постройте угол 75° с заданной стороной.
<https://clck.ru/dVohs>
6. Постройте квадрат по двум заданным серединам смежных сторон.
<https://clck.ru/dVoku>
8. Для данного угла ABC и точки M внутри него найдите точки D на AB и E на BC и постройте отрезки DM и ME , такие что $BD = DM = ME$.
<https://clck.ru/dVov3>
10. Постройте прямую, проходящую через заданную точку, на которой две пары параллельных прямых отсекают равные отрезки.
<https://clck.ru/dVoy6>

Все ссылки надо открывать в браузере на компьютере (на телефоне или планшете они могут не открыться).

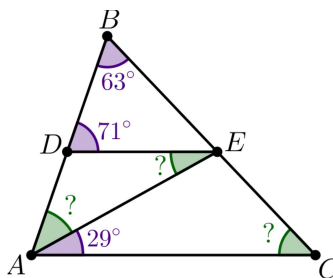
Построение треугольников

1. Постройте треугольник
 - (а) по углу, биссектрисе, проведенной из этого угла, и стороне, прилегающей к данному углу;
 - (б) по высоте и двум углам при основании.
2.
 - (а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.
 - (б) Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.
 - (в) Постройте треугольник по стороне и двум высотам, проведенным к другим сторонам;
 - (г) Постройте треугольник по медиане, высоте и стороне, к которой проведены данные медиана и высота.
3. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.
4. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, проведенной к другой стороне.
5. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них.
6. Постройте треугольник по углу и высотам, проведенным из вершин двух других углов.
7. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным из конца этой стороны.
8. Постройте треугольник по двум высотам и углу, из вершины которого проведена одна из них.
9. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов.
10. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.
11. Постройте треугольник по периметру и двум углам.
12. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

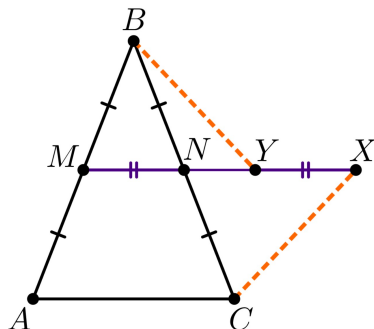
Повторение

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BH , медиана BM и биссектриса BL . Оказалось, что угол $\angle ABH = 17^\circ$. Найдите $\angle HBL$, $\angle MBC$.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки D и E таким образом, что отрезок $DE \parallel AC$. Известно, что $\angle ABC = 63^\circ$, $\angle BDE = 71^\circ$, а $\angle CAE = 29^\circ$. Найдите (а) угол $\angle DEA$, (б) угол $\angle BAE$, (в) угол $\angle ACB$.



3. Точки M и N — середины равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка X , а на отрезке NX — точка Y так, что $MN = XY$. Докажите, что $BY = CX$.



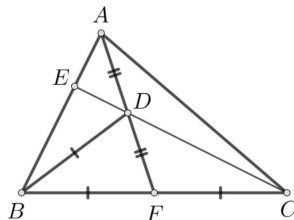
4. Точка E — середина стороны CD прямоугольника $ABCD$. На стороне BC взяли такую точку K , что $\angle AEK = 90^\circ$. Найдите длину отрезка AK , если $BK = 5$, $CK = 1$.

5. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM проведена высота LH . Периметр треугольника KLM равен 38 см, периметр треугольника LMH равен 30 см. Найдите длину высоты LH .

6. Дан треугольник ABC , BD — его биссектриса. На продолжении биссектрисы (за точку D) нашлась такая точка F , что $CF = CD$. На прямой AB отмечена такая точка E , что $EF \parallel AC$. Докажите, что $BC = BE$

7. В треугольнике ABC угол A равен 65° . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке D . Докажите, что $BC > CD$

8. AF — медиана треугольника ABC , D — середина отрезка AF , E — точка пересечения прямой CD со стороной AB . Оказалось, что $BD = BF$. Докажите, что $AE = DE$



9. В треугольнике ABC $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Через середину стороны BC проведена прямая p , перпендикулярная BC . Прямая p пересекает сторону AB в точке L . Известно, что один из отрезков BL и AL на 4 см больше другого. Найдите длину отрезка прямой p , находящегося внутри данного треугольника.

10. Биссектриса внешнего угла ABD треугольника ABC пересекает биссектрису угла ACB в точке K , $\angle CKB = 19^\circ$. Найдите угол BAC .

Знакомство с окружностью

Определение. *Окружность* — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки. *Радиус окружности* — отрезок, соединяющий любую её точку с центром.

Определение. *Хордой* называется отрезок, соединяющий любые две точки окружности.

Определение. *Диаметром* окружности называется хорда, проходящая через её центр.



1. Важный факт.

(а) На окружности отмечены точки A, B, C так, что AB — диаметр. Докажите, что $\angle ACB = 90^\circ$.

(б) На окружности отмечены точки A, B, C так, что $\angle ACB = 90^\circ$. Докажите, что AB — диаметр.

2. Докажите, что длина любой хорды не превосходит длину диаметра.

3. Докажите, что равные хорды окружности находятся на одинаковых расстояниях от центра.

4. **Важный факт.** Хорда AC является серединным перпендикуляром к хорде BD . Докажите, что AC — диаметр.

5. В окружности проведены две параллельные хорды. Докажите, что у них есть общий серединный перпендикуляр.

6. Хорда окружности делится пополам её диаметром. Докажите, что либо эта хорда перпендикулярна данному диаметру, либо она сама проходит через центр окружности.

Определение. *Линия центров окружностей* — прямая, проходящая через центры двух окружностей.

7. Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров.

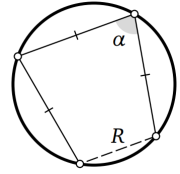
8. **Описанная окружность треугольника.** Дан треугольник ABC . Вспомните, почему серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на одной окружности.

9. **Важный факт.** Два противоположных угла четырехугольника прямые. Докажите, что все его вершины лежат на одной окружности.

10. Приведите пример четырехугольника, вокруг которого нельзя описать окружность. Фраза «окружность, описанная вокруг четырёхугольника» означает, что можно провести такую окружность, что все вершины четырёхугольника будут на ней лежать.

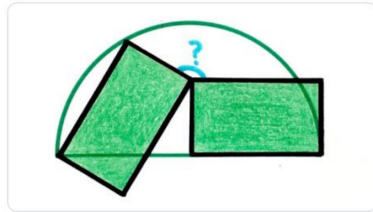
11. **Теорема о трезубце.** Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , I_B — точка пересечений биссектрис внешних углов A и C . Докажите, что точки I, I_B, A, C лежат на одной окружности.

12. В окружность вписана простая ломаная, состоящая из трех равных звеньев. Расстояние между началом и концом ломаной равно радиусу окружности. Найдите угол между соседними звеньями ломаной. *Внимание: у задачи два ответа!*



13. На чертеже изображены полуокружность, два равный прямоугольника. Найдите угол.

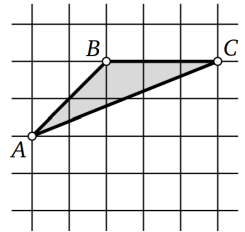
The two rectangles are congruent. What's the angle?



Домашнее задание

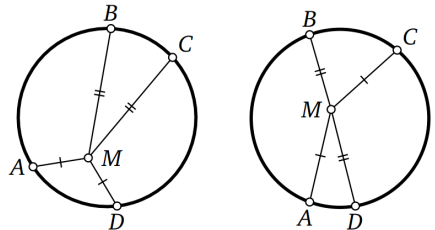
1. На листе бумаги нарисована окружность. С помощью циркуля и линейки постройте её центр.

2. Точки A, B, C, D лежат на окружности именно в таком порядке. Оказалось, что $\angle ABC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle ADC = 90^\circ$.



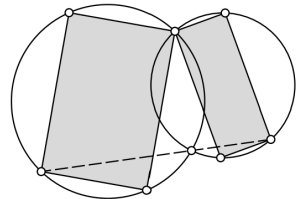
3. Сторона клетки на рисунке равна 1. На каком расстоянии от прямой BC находится центр окружности, проходящей через точки A, B и C ? Не забудьте объяснить свой ответ.

4. Точки A, B, C, D в данном порядке лежат на одной окружности. На плоскости взяли такую точку M , что
(а) $AM = DM, BM = CM$;
(б) $AM = CM, BM = DM$.



Обязательно ли точка M находится в центре окружности?

5. Два прямоугольника имеют общую вершину. Вокруг каждого из них описали окружность. Докажите, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на одной прямой с двумя вершинами прямоугольников.



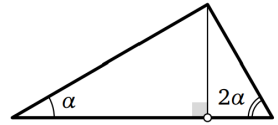
Про котёнка

1. Как-то раз сидел маленький котёнок на лестнице, в точности в её середине. В начале лестница стояла строго вертикально, обоими концами у стены. Вертикальное положение весьма неустойчиво. Вот лестница и упала. Падала она так, что верхний её конец спускался сверху вниз по вертикальной стене, а нижний скользил по земле. Найдите траекторию движения котёнка.
2. Даны две точки A и B . Через точку B проведена прямая ℓ . Из точки A на прямую ℓ провели высоту AK (K — котёнок). Найдите траекторию движения котёнка, если начать поворачивать ℓ .
3. **(а)** На окружности отмечена точка X . По окружности двигается точка A . Точка K (котёнок) — середина AX . Найдите траекторию движения котёнка.
(б) Внутри окружности отмечена точка X . По окружности двигаются точки A и B так, что хорда AB всегда проходит через X . Точка K (котёнок) — середина AB . Найдите траекторию движения котёнка.
(в) Решите задачу для случая, когда точка X отмечена вне окружности.
4. Точка O — центр некоторой окружности, прямая ℓ проходит через O . Точка X движется по окружности. В каждый момент времени из точки X опускают высоту XH на прямую ℓ , а затем на отрезке OX отмечают точку K (котёнок) так, чтобы $OK = OH$. Найдите траекторию движения котёнка.

May the force be with you

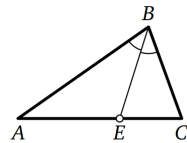
1. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

2. Один из углов треугольника в два раза больше другого. Высота, опущенная из третьего угла, делит сторону на два отрезка. Докажите, что разность этих отрезков равна одной из сторон треугольника.

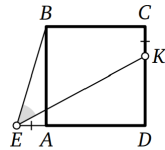


3. Биссектрисы двух углов при одной стороне параллелограмма делят другую его сторону на три равные части. Найдите отношение сторон параллелограмма. *Надо рассмотреть два случая.*

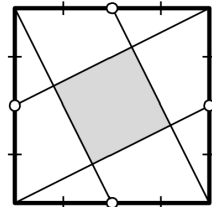
4. В треугольнике ABC провели биссектрису BE . Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов треугольника в два раза больше другого.



5. На стороне CD и на продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ взяли точки K и E так, что $CK = AE$. Найдите угол BEK .



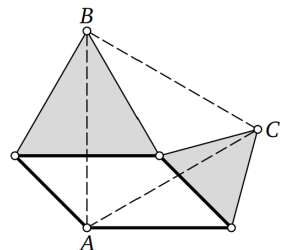
6. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M , причём $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная прямой AC и пересекающая BC в точке H . Докажите, что $BH = MC$.



7. Вершины квадрата соединили отрезками с серединами сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что закрашенная на рисунке фигура — квадрат.

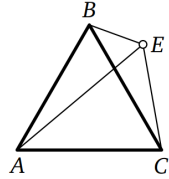
8. На двух сторонах параллелограмма построили равносторонние треугольники так, как показано на рисунке. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

9. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $AD = 3AB$. Биссектриса угла A пересекает BC в точке L и прямую CD в точке K . Прямая, проходящая через точку D и середину LC , пересекает прямую AB в точке M . Оказалось, что $MK = 15$. Найдите периметр параллелограмма.

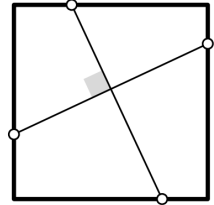


10. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC втрое больше угла при вершине. На стороне AC выбрана точка D такая, что $\angle ABD = 2\angle DBC$; а на стороне AB выбрана точка E так, что $ED = BC$. Докажите, что $AE = BD$.
11. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что сторона DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

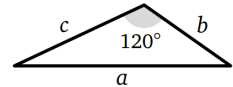
12. Вне равностороннего треугольника ABC взята точка E так, что угол BEC равен 120° . Докажите, что $BE + EC = AE$.



13. В квадрате провели два перпендикулярных отрезка так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.



14. Стороны треугольника равны a , b и c . Напротив стороны длины a в треугольнике лежит угол 120° . Докажите, что из отрезков a , b и $b + c$ можно сложить треугольник. Чему равен средний угол получившегося треугольника?



Разнойой

1. BK и CL — биссектрисы треугольника ABC . Найдите углы этого треугольника, если $\angle ALC = 104^\circ$, а $\angle BKC = 80^\circ$
2. Через вершину B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведен луч, который пересекает отрезок AC в точке K , а прямую, проходящую через точку A , параллельно стороне BC в точке L . Докажите, что если $\angle ABC = 3\angle CBK$, то $KL = 2AB$.
3. Два перпендикулярных отрезка AE и CG пересекаются в точке D . Точки B и F такие, что $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники. Известно, что $\angle GAD = 36^\circ$, $\angle GCF = 15^\circ$, $BE = CF$. Найдите величину угла AEB . Ответ дайте в градусах.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 120^\circ$. На стороне AB отмечена точка P такая, что $BP = 2AP$. На стороне CB отмечена точка T такая, что $\angle CPT = 30^\circ$. Найдите отношение $\frac{CT}{TB}$
5. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку A отметили точку E . Оказалось, что $ED = DB = BA$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ABD лежит на прямой EC .
6. Точка M — середина отрезка AB . По одну сторону от прямой AB отметили такие точки L и N , что LM — биссектриса угла AMN , а NM — биссектриса угла BML . Докажите, что $\angle ALB = \angle ANB$, если известно, что $ML = MN$.
7. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC в два раза больше стороны AB . На продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F . Точка E — середина стороны AD , $\angle DFC = 30^\circ$. Найдите угол EBF .
8. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны, а $\angle BCD = 2\angle ACE$. Найдите $\angle ACE$.
9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC построен квадрат $BCDE$ вершинами наружу. AN — высота треугольника ABC , точка M на луче AN такова, что $AM = BC$. Через точку B провели прямую l перпендикулярно DM , а через точку C — прямую s перпендикулярно EM . Докажите, что прямые l и s пересекаются на прямой AN .

Часть II

Алгебра

Дроби

Упростите выражение:

$$1. \left(\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} + 0,125 \right) : 2\frac{1}{2} + 0,43$$

$$2. \left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \cdot 5,2 \right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7 \right)$$

$$3. \frac{(1,88 + 2\frac{3}{25}) \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{0,216}{0,15} + 0,56 \right) : 0,5}{0,625 - \frac{13}{18} : \frac{26}{9} + \left(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15} \right) \cdot 4,5}$$

$$4. \frac{-0,12 + 0,12 \cdot 0,5}{(-0,125 + \frac{3}{8}) : \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$5. \frac{(-2,75 \cdot 2\frac{2}{11} - 1\frac{7}{8} \cdot (-3,2)) : \left(2\frac{9}{40} - 0,275\right)}{2,47 : 0,26 - \left(-5\frac{3}{11} : -10\frac{6}{11}\right)^3}$$

$$6. \frac{-3\frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{4}{15}\right) : -\frac{6,8}{0,9} - 1\frac{7}{9} \cdot (-0,75) : \left(-\frac{1}{6}\right)}{-8\frac{1}{3} \cdot 16,2 : (-22,5)}$$

$$7. 3\frac{1}{4} - \left(\frac{6 : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} + 5\frac{2}{11}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{15}\right) \cdot \frac{12}{49}}{3\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} \right) \cdot 2\frac{1}{3}$$

8. Выполните действия и разделите полученное число в отношении 0,1 : 0,7:

$$\frac{\left(-4\frac{3}{20} + 1\frac{5}{12} - \frac{4}{15}\right) \cdot 0,6 - 0,6}{1,6 - 1,6 \cdot 3\frac{1}{7}} - \frac{0,0032 : (-0,4)^3 + 0,07 \cdot 20}{(1,3 - 1,236 : 1,2) : (-0,03) \cdot \frac{1}{6}}$$

$$9. \text{Найдите 40\% от числа: } \frac{-153,9 : (-3,8) - \left(2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{1}{6} - 3\right) + 156,8 \cdot (-0,25)}{(-0,6)^2 : (0,2)^3 + (-5)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - (-2)^4}$$

Дроби. Добавка.

1.

$$\frac{\left(19\frac{1}{6} + 43,75\right) : \frac{5}{6}}{(13,3 - 11,5) : 11\frac{2}{3}} - \frac{\left(26,8 - 23\frac{3}{7}\right) : \frac{6}{35}}{0,5}$$

2.

$$\frac{(15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7) \left(3,2 + 0,8 \left(5,5 - 3\frac{1}{4}\right)\right)}{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2,5\right) \cdot 1\frac{1}{5}}$$

3.

$$\frac{\left(9 - 5\frac{3}{8}\right) \cdot \left(4\frac{5}{12} - 4 : 2\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} : 4\right) \cdot \frac{4}{7}\right)}{\frac{1}{24} + \frac{1}{4} : 13\frac{1}{3}}$$

4.

$$\frac{\left(\left(\frac{23}{36} + \frac{31}{63}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{21}\right)\right) \cdot 48 : \left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{19}{26} + \frac{14}{39} - \frac{1}{6}\right) \cdot 54\frac{1}{6} : \left(8\frac{4}{7} : \frac{12}{35}\right)}$$

Пропорции и отношения. Классная работа.

1. Решите уравнение:
$$\frac{3\frac{1}{3} \cdot 1,9 + 19,5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0,16} = \frac{3x}{\left(1\frac{32}{63} - \frac{13}{21}\right) \cdot 3,6 : 1\frac{1}{15}}$$
2. Разделите число 144 на три части x, y, z так, чтобы $x : y = 3 : 4, y : z = 4 : 5$.
3. Собственная скорость парохода относится к скорости течения реки, как $36 : 5$. Пароход двигался вниз по течению реки 5ч 10мин. Сколько времени потребуется ему, чтобы вернуться обратно?
4. В двух стаканах было поровну воды. Количество воды в первом увеличилось вначале на 1%, потом на 2%, потом на 3%, и так далее до 27%. Во втором стакане количество воды увеличилось вначале на 27%, потом на 26%, потом на 25% и так далее до 1%. В каком стакане стало больше воды?
5. Экологи запротестовали против большого объема лесозаготовки. Председатель лес-промхоза успокоил их следующим образом: "В лесу 99% сосен. Будут вырубаться только сосны, и после вырубок процент сосен останется почти неизменным – сосен будет 98%". Какая часть леса отведена под рубки?
6. Влажность свежескошенной травы 60%, сена 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?
7. В первый день автомобиль прошёл 40% всего пути, путь, пройденный во второй день, так относится к пути, пройденному в третий день, как $3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{4}$. Во второй день автомобиль прошёл на 10 км больше, чем в третий день. Найдите весь путь автомобиля.
8. В ванну провели два крана: с горячей водой, который может ее наполнить за 12,5 минут, и с холодной, который может наполнить ее за 10 минут. Открыли оба крана на 2 мин 30 сек, потом кран с горячей водой закрыли. Через сколько времени другой кран закончит наполнение ванны?
9. Школьник прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день -- 0,3 остатка и еще 20 страниц, а в третий -- 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

Пропорции и отношения. Домашняя работа.

1. Решите уравнение:
$$\frac{\left(2\frac{1}{6} + 4,5\right) \cdot 0,375}{2,75 - 1\frac{1}{2}} = \frac{20x}{0,175 : 2,5 + 0,43}$$
2. Разделите число 310 на три части x, y, z так, чтобы $x : y = 3 : 2, y : z = 5 : 3$.
3. Собрали 8 кг свежих цветков ромашки, влажность которых 85%. После того как цветки высушили, их влажность составила 20%. Чему равна масса цветков ромашки после сушки?
4. В бассейн подведены три трубы. Первая может наполнить бассейн за 6 часов, вторая – за 4 часа, а через третью – вся вода из наполненного бассейна может вытечь за 12 часов. Во сколько времени наполнится 0,5 бассейна, если открыть все три трубы одновременно?
5. Лодка проплыла некоторое расстояние по озеру за 4 часа. Такое же расстояние плот проплывает по реке за 12 часов. Сколько времени затратит лодка на тот же путь по течению реки? Против течения реки?

Модуль

1. $\left| \frac{3}{2} - x \right| + 2,7 = 4\frac{2}{5}$
2. $5 \cdot (7 - 2x) \cdot \left(|x| + 2\frac{1}{2} \right) = 0$
3. $\left(2\frac{1}{3} - 3x \right) \left(4\frac{2}{3} - |x - 7| \right) = 0$
4. $3,6(-4,8 + |x - 3|) = -5,04$
5. $||x - 5| - 5| - 5| = 5$
6. $||x - 1| - 1| = 2$
7. $|5 - x| + (x - 3)^2 = |x - 3|^2 + 1$

Домашнее задание

8. $0,125 : \left(\frac{(0,45 + 0,25) : 4,2}{(0,9 + 0,5) : 2,1} - \frac{3\frac{3}{4} - (7,55 - 3,8)}{\frac{4}{25} \cdot 0,25 + 6,23} \right) + \frac{7\frac{1}{8} : 1,9}{1 - 0,6 : \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}}$
9. $\frac{\left(\left(2,375 + \frac{15}{46} \cdot \frac{23}{30} + 0,625 \right) : 4\frac{7}{8} + 2,5 : 1,25 : 3 \right) \cdot 0,75}{9,56 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 5,6 + \frac{1}{25} \cdot 0,75}$

Модули-2

1. $5^2 - |x| = 0$
2. $|x - 3| + |x + 1| = 4$
3. $|x - 1| + |5 - x| = 18$
4. $||2x - 3| - 1| = x$
5. $|x| + 15 = 14,99 - x^2$
6. $\frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 - |x|$
7. $|2x - 3| = |x - 7|$
8. $|x - 3| + |x - 2| + |x - 1| = 2,5x$

Повторение повторения

9. Замок Персиваля имел квадратную форму. Однажды Персиваль решил расширить свои владения и добавил к замку квадратную пристройку. В результате периметр замка увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь замка?
10. Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40% больше, то доля Кисы уменьшилась бы на 60%. А как изменилась бы доля Воробьянинова, если бы Остап взял себе денег на 50% больше?
11. В тесте к каждому вопросу указаны пять вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $\frac{1}{5}$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?
12. Автобус называется переполненным, если в нем более 50 пассажиров. По дороге едет колонна автобусов (среди которых есть переполненные). Что больше — процент переполненных автобусов или процент пассажиров, которые едут в переполненных автобусах?

Выражения со степенями

Представьте в виде произведения (частного) степеней с простыми основаниями.

- $\left(\frac{25}{49}\right)^3 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$.
- $1,2^5 \cdot 1,4^7 \cdot (5 : 7)^6$.
- $(-1, 125)^{15} \cdot 128^{11} \cdot (5 : 3)^{30}$.
- $1,6^2 : 1,25^3 \cdot 3,6^2 : 0,15^4$.
- $((16)^4)^5 : 256^4 \cdot ((64)^2)^4 : 128^6$
- $\left(\frac{1}{21} - \frac{1}{32}\right)^4 \cdot \left(7\frac{2}{34} - 6\frac{3}{45}\right)^2 \cdot \left(5,5 - \frac{176}{22}\right)^5 : (1531 - 200)^2$
- $\frac{(3 \cdot 1,2 \cdot 512)^2 \cdot 1,5^3 \cdot 6^5 \cdot 64}{\left(3 \cdot \frac{6}{5} \cdot 2^6\right)^3 \cdot 3125}$.
- $\frac{121}{144} \cdot \frac{743}{675} \cdot \frac{676}{1024} \cdot \frac{225}{1331} \cdot \frac{576}{900} \cdot \frac{121}{169} \cdot \frac{216}{625}$.
- $\left(-1\frac{5}{8}\right)^5 \cdot \left(-\frac{4}{13}\right)^2 \cdot (-1300)^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^2$.
- $(-1,7)^3 \cdot \left(-\frac{49}{51}\right)^4 \cdot \left(-\frac{20}{343}\right)^3$.
- $(-0,169)^5 \cdot \left(-\frac{50}{0,289}\right)^4 \cdot \left(1\frac{4}{13}\right)^8$.
- $\frac{(3,61)^7}{\left(\frac{1}{\frac{24}{5/6}}\right)^6} \cdot \frac{625}{729} : \left(1\frac{11}{27}\right)^4$.
- Вычислите **(а)** 1000000001^2 **(б)** 111111111^2 . **(в)** 999999999^2 .

Выражения со степенями. Продолжение.

Классная работа

- $$1. \frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{6^2 \cdot 49^{19}}.$$
- $$2. \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}.$$
- $$3. \frac{5 \cdot (3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{3 \cdot 7^{15} + 7^{16}}.$$
- $$4. \frac{(5^{n+2})^3 : 125^n}{625 \cdot 5^{n-1}}.$$
- $$5. \left(-\frac{169}{187}x^2y^5z\right)^4 \cdot \left(1\frac{4}{13}xz^4\right)^8 \cdot \left(-\frac{11}{17}xz^3\right)^3.$$
- $$6. \left(-\frac{8}{9}x^2yz^3\right)^{10} \cdot \left(-\frac{27}{11}xy^2z^4\right)^8 \cdot \left(3\frac{25}{32}yz^5\right)^4.$$
- $$7. \left(3\frac{79}{121}xy^2z^5\right)^5 \cdot \left(-\frac{88}{119}x^5y\right)^8 \cdot -\left(\frac{154}{208}yz^7\right)^{10}.$$
- $$8. 2^{17} - 2^{16} - 2^{15} - \dots - 2^1 - 1.$$

Домашняя работа

- $$9. \frac{(36^2)^4 \cdot (4^6)^4 \cdot (27^3)^2}{(12^3)^{10} \cdot 64}.$$
- $$10. \frac{5 \cdot (3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{3 \cdot 7^{15} + 7^{16}}.$$
- $$11. (12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^{2n-1}) : (4 \cdot 5^{2n-2}).$$
- $$12. \left(-\frac{7}{8}xyz^2\right)^3 \cdot \left(1\frac{6}{7}yz^4\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{-0,169}x^2z\right)^5.$$
- $$13. \left(-1\frac{1}{11}a^2c^4\right)^3 \cdot \left(-2\frac{41}{51}ab^2c^5\right)^4 \cdot \left(-\frac{17}{52}bc^4\right)^{10}.$$

Умножение одночлена на многочлен

1. $(0,75x^2)^2 \cdot \left(x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x\right)$

2. $\left(\frac{1}{2}xy^3z\right)^2 \cdot \left(xy^3 + \frac{1}{2}x^2z - 12\right)$

3. $2x(3x + y) + y(y - 2x)$

4. $5a(a^2 - 4a) - 4a(a^2 - 5a)$

5. $(a^3x^3y - 3a^2x^2y - 3abx^2y) : (axy)$

6. $-(6x^2y - 3xy^2 - 4x^2y^2) : (-2xy)$

7.* $1,001^2 \cdot (10^6 - 10^3)$

8.* $(2^2 - 2) \cdot (2^3 - 2^2) \cdot \dots \cdot (2^{1000} - 2^{999})$

Раскрываем скобки

1. $(2a + 5b) \cdot (3a - 4b)$
2. $(7a - b) \cdot (-8a + 2b)$
3. $(8x - 1) \cdot (7x + 1)$
4. $(31x - 30) \cdot (29x - 30)$
5. $(2a + b + 7) \cdot (2a + b + 3)$
6. $(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2x)$
7. $(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 2)$
8. $(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 - 2y^2 + z^2)$
9. $(4x - 1) \cdot (8x^2 + 2x + 0,5)$
10. $(a - 2b - 3c + 4d) \cdot (a + 2b + 3c - 4d)$
11. $(a + b - 3c + 4) \cdot (a + b + 3c + 6)$
12. $(a + 5b - c + 4d) \cdot (a + 5b + c + 6d)$

Продолжаем раскрывать скобки

1. $(-0, 125 + 0, 2x)(-0, 2x - 0, 125)$
2. $(2ab - 3b^2)(3ab - 7a^2)$
3. $-\frac{1}{3}(9y^2 - 1) + (3y + 6)(y - 1)$
4. $(a^2 - 5a + 4)(2a + 3) - (2a^2 - a - 10)(a - 3)$
5. $(m + 2n - 1)(m + 2n + 9) - (m - 2n + 1)(m - 2n - 9)$
6. $a(a^2 - 7) - (a + 1)(a + 2)(a - 3)$
7. $(a^2 + 4a + 4)(a - 2) - (a^2 - 4a + 4)(a + 2)$
8. $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$
9. $(5^{n+1} + 1)(5^{2n} - 5^n + 1) - 5^{3n}$
10. $(3b^6 + 15b^5c + 4) \cdot (-0,1bnc)$
11. Упростите выражение, используя введение новых переменных:

$$(x^2 + y^2 p^2 - 4pxy)(x^2 + y^2 + p^2 + 3pxy) - (x^2 + y^2 + p^2)(x^2 + y^2 + p^2 - pxy)$$

12. Докажите тождество:

$$(a^3 + ab + 1)(3a^3 + 2ab) - (3a^3 - ab + 1)(a^3 + 2ab) = 2a^3 + 4a^2b^2$$

Продолжаем раскрывать скобки. Дополнительные задачи.

1. Ширина прямоугольника на 4 см меньше его длины. Если длину прямоугольника уменьшить на 3см, а ширину увеличить на 2см, то площадь прямоугольника уменьшится на 7см^2 . Найдите длину и ширину данного прямоугольника.
2. Докажите, что если выражение $3 + 4b + 5$ при некоторых целых значениях b и делится на 11, то и выражение $9 + b + 4$ при этих значениях b и также делится на 11.
3. Решите уравнение $1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 2021))) = (1, 2)^2$.

Вынесение одночлена за скобки

1. $-72n^5 - 27n^{10}$
2. $125 \cdot 25^n - 5^{2n+1}$
3. $a^2 \cdot x^{n+3} + a^{n+1} \cdot x^{n-1}$
4. $2x^2 \cdot (y - 1) - x(y - 1)$
5. $3y(x - 7) + y^2(7 - x)$
6. $36ax(2x - a) + 9(a - 2x)$
7. $15a(2 - x)^2 - 3a(x - 2)$
8. $(3x - 4y)(2x - 5y) - 3y(4y - 3x)$
9. $(a + 9x)(a^2 - 4ax) - 5ax(a + 9x)$
10. $(pq - 10q^2)(pq + 25) + 5(50q - 5p)$
11. $c(a - b)^2 - (a - b)^4$
12. $(-5a - 10b)^2$
13. $\left(-\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)^3$

Алгебраические преобразования. Повторение.

- $2cd(3dc^2 - 2c^2 + 4dc - cd^3) - 3c^2d(2cd - c + 3d - 2d^3)$
- $(-1\frac{1}{9}b^{n-1} + \frac{1}{3}b^n + 6b^3) \cdot 0,9b^{n+1} - 0,8b^n(\frac{7}{8}b^n - b^{n+1} + 1\frac{1}{8}b^4)$
- $(y^2 + 8y - 6)(y^2 - 5y + 7) - (y^2 - 2y + 4)(y^2 + 5y - 33)$
- $(2^{m-1} \cdot y + y^2 \cdot x^{m+1}) \cdot (-y^2 \cdot x^{m+1} + 2x^{m-1} \cdot y)$
- Докажите тождество:
 - $(a + x + y)(a + x - y) + y^2 = (a + x)^2$
 - $(x^4 + y^4)(x^4 + y^4 - 2xy) - (x^4 + y^4 - 6xy)(x^4 + y^4 + 4xy) = 24x^2y^2$

Десятичная запись.

Простейшее применение десятичной записи

- (а) Сумма цифр a и b равна 7. Докажите, что число вида \overline{aba} делится на 7.

(б) Сумма цифр a и b равна 7. Докажите, что число вида $\overline{aab0b}$ делится на 7.
- Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.
- Трехзначное число начинается с цифры 4. Если эту цифру перенести в конец числа, то получится число, составляющее 0,75 исходного. Найти исходное число.
- Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. Найти все такие числа.
- Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

Умножение чисел

- Число x оканчивается на 4.
 - Найдите последнюю цифру числа x^2 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^3 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^4 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^{2018} .
- Число x оканчивается на 7.
 - Найдите последнюю цифру числа x^2 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^3 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^4 ;
 - Найдите последнюю цифру числа x^{2021} .
- Есть быстрый способ посчитать произведение двузначных чисел. Например, наши действия при перемножении 92 на 89:
 - Вычисляем, на сколько числа меньше 100, получаем $100-92 = 8$ и $100-89 = 11$;
 - Вычитаем из 100 сумму полученных чисел, получаем $100 - 8 - 11 = 81$;
 - Считаем произведение полученных чисел $8 \times 11 = 88$ и приписываем справа;
 - Получаем $92 \times 89 = 8188$. Profit!

Для каких двузначных чисел работает такой вариант быстрого счета и почему?

Остатки

1. Число x имеет остаток 3 при делении на 7.
 - (а) Найдите остаток при делении на 7 числа x^2 ;
 - (б) Известно, что число x дает остаток 2 при делении на 7, число y — остаток 3 при делении на 7. Какой остаток может давать число xy при делении на 7?
 - (в) Найдите остаток при делении на 7 числа x^3 ;
 - (г) Найдите остаток при делении на 7 числа x^4 ;
 - (д) Найдите остаток при делении на 7 числа x^{2021} .

2.
 - (а) Какие остатки при делении на 3 может давать число x^2 ?
 - (б) Какие остатки при делении на 8 может давать число x^2 ?
 - (в) Известно, что число x дает остаток 2 при делении на 3, число y — остаток 3 при делении на 5. Какой остаток может давать число xy при делении на 15?
 - (г) Какие остатки при делении на 24 может давать число x^2 ?
 - (д) Какие остатки при делении на 9 может давать число x^3 ?

Сворачиваем скобки

Представьте в виде произведения двух скобок

- $6ab - 14a + 15b - 35.$
- $\frac{27ab}{2} - \frac{15a}{2} - 45b^2 + 25b.$
- $\frac{33x^3y}{4} - \frac{15x^2}{4} + 33xy^2 - 15y.$
- $\frac{11x^4y}{5} - \frac{21x^3}{5} + 11xy^2z - 21yz.$
- $a^3b + 4a^2c - 2ab^2 + 3abc^3 - 8bc + 12c^4.$
- $6a^2bc - 2ab^2c + 4abc^2 - 15ab + 5b^2 - 10bc.$
- $4x^5 - 5x^3yz + 28x^3y - 12x^2yz^2 - 35xy^2z + 15y^2z^3.$
- $14x^3y + 12x^2y^3 - 2x^2z^4 - 35xy^2z - 30y^4z + 5yz^5.$
- $10a^4 - 11a^3b + 15ab^2 - 35a - \frac{33b^3}{2} + \frac{77b}{2}.$
- $21x^2 - 14xy^2 + \frac{39xy}{2} + 35x - 13y^3 + \frac{65y}{2}.$
- $35x^4 - 20x^3y + 10x^3z - 28xyz + 16y^2z - 8yz^2.$
- $15x^3 + 9x^2y - 21x^2z + 10xy^2 + 6y^3 - 14y^2z.$
- $-20x^2y + 28xy^2 + 24xyz + 45xz^2 - 63yz^2 - 54z^3.$
- $39x^2z + 169xy^2z - 15xy + 52xz^2 - 65y^3 - 20yz.$
- $22x^3z - 14x^2y - 55xyz^2 + 77xz^2 + 35y^2z - 49yz.$
- $12x^2y^2 + 8x^2yz - 24xy^2z + 39xyz^2 + 26xz^3 - 78yz^3.$

Представьте в виде произведения трех скобок

1. $1001ace + 77acf - 91ade - 7adf - 143bce - 11bcf + 13bde + bdf.$
2. $15ace - 3acf - 5ade + adf - 30bce + 6bcf + 10bde - 2bdf.$
3. $40ace + 60acf - 70ade - 105adf + 24bce + 36bcf - 42bde - 63bdf.$
4. $105ace - 15acf - 126ade + 18adf + 140bce - 20bcf - 168bde + 24bdf.$
5. $32x^2y - 24x^2z - 40xy^2 + 78xyz - 36xz^2 - 60y^2z + 45yz^2.$
6. $12x^2y + 6x^2z - 8xy^2 + 26xyz + 15xz^2 - 20y^2z - 10yz^2.$

Решите уравнение

1. $2x^2 + 7x = 0$
2. $3x(2x + 3) = 8x + 12$
3. $xy - 2x + 4y = 8$
4. $x^2 + 2x = 8$
5. $x^2 + 5x + 6 = 0$
6. $x^2 - x - 12 = 0$
7. $xy - 3x + 3y - 9 = 0$
8. $x^2 - 9 = 0$
9. $(x^2 - 4x)^2 = 12x - 3x^2$
10. $x^3 - 3x^2 + 8x - 24 = 0$
11. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$
12. Опишите все тройки чисел x, y, z такие, что $xy - yz - xz + x + y + z = 1$.
13. Сколько целых решений у уравнения $a^2b^2 + a^2 + b^2 = 2004$?
14. Докажите, что $-a^2c - ab^2 - bc^2 + a^2b + b^2c + c^2a$ равняется 0 тогда и только тогда, когда два из чисел равны друг другу.

Группировка

Разложите на множители

1. $10pq - 15q + 2p - 3$
2. $18ab - 28 - 63b + 8a$
3. $x^5 - 2x^4y + xy^4 - 2y^5$
4. $\frac{3a^2}{5} - \frac{7ab}{2} + \frac{4a}{7} - \frac{10b}{3}$
5. $axy - 2ax - 4ay + 8a + 3xy - 12y + 24 - 6x$
6. $6x^2 - 5x - 6$
7. $5a^2 - 11ab + 2b^2$

Решите уравнение

8. $40x(3 - 6x) = 25(3 - 6x)$
9. $(x - 5)(x^2 + 4) + 25 = 5x$
10. $(2x + 1)(x + 7) - (2x + 1)(9 - x) - 4x - 2 = 0$
11. $xy - 3x - 8y + 24 = 0$
12. $x^2 + 13x + 30 = 0$
13. $2x^2 - x - 1 = 0$

Разные задачи

14. Положительные числа a , b , c таковы, что $a^3b^2c^7 + a^4bc^7 - a^3bc^8 = 0$. Докажите, что одно из чисел равно сумме двух других.
15. Для натуральных a , b , c верно, что $a^2 - ab + ac - bc = 0$. Докажите, что $a = b$.
16. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $n^3 + 12n^2 + 120n + 1440$ делится на 23.
17. Докажите, что если a , b и c — попарно различные числа, то $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ не равно 0.

Группировка-3

Решите уравнение

1. $x^2 - x - 72 = 0$

2. $x^2 + 10x - 56 = 0$

3. $x^2 + 4x + 100 = 0$

4. $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

5. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

6. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

Линейные уравнения

Уравнение — равенство, содержащее переменную.

Корнем уравнения (решением уравнения) называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Определение. Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a, b — некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

1. Сколько корней может иметь линейное уравнение?

Решите уравнение

2. $-x - (2x - (3x - (5x - 1))) = -4$
3. $\frac{3}{5}x + \frac{34}{45} + \frac{5}{3}x = 0$
4. $\frac{1}{7} \left(\frac{2}{5} \left(\frac{5}{14} (x - 2) + 6\frac{2}{7} \right) - \frac{5}{2} \right) = 0$
5. $-0,7 \cdot (0,2x + 0,2) + 0,6 \cdot (0,1x + 0,2) = -0,08x - 0,02$
6. $0,7 \cdot (0,1x + 5) - 0,2 \cdot (0,3x - 4) = 0,01x + 4,3$
7. $-2\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{26}x - \frac{10}{39} \right) - 3\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{7}x + \frac{8}{21} \right) = -1\frac{2}{9} - 4x$
8. $-5\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{16}{23}x - \frac{8}{69} \right) - 36\frac{11}{30} = -6\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{19}x + \frac{3}{38} \right)$
9. $\frac{x-1}{7} - \frac{2x+1}{3} = \frac{3x-2}{14} - \frac{11x-3}{21}$
10. $\frac{4-x}{2} - \frac{6x+5}{8} - x = 1 - \frac{9x+1}{4}$
11. $2x - 1 - \frac{3x-4}{2} = \frac{x+1}{3} - \left(1 - \frac{x+2}{2} \right)$

Модуль А

12. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2x}{7} - 1 = \frac{3x - \frac{2x-5}{3}}{14}$
13. $\frac{0,5 - \frac{2x-4}{3}}{5} - \frac{25x-11}{15} = \frac{3x - \frac{1+x}{5}}{3} + 1\frac{1}{6}$
14. $x + 7 - \frac{3x - \frac{2-x}{2}}{4} = \frac{x - \frac{3x-1}{4}}{2}$
15. $\frac{1\frac{2}{3}x - \frac{5}{7}(x-1)}{2\frac{1}{3}} - 0,25(x-1) = 2\frac{7}{8}$

Модуль Б

16. $(5a + 2)(2a + 5) = (10a - 3)(a + 4)$

17. $(4x + 5)(9x + 4) = (12x + 4)(3x + 10)$

18. $(2x^2 + 3x + 1)(3x + 1) = (x + 1)(6x^2 + x - 2)$

19. $(ab - a + b - 1)(b + 3) = (ab + b + 2a + 2)(b - 4)$

Домашнее задание

20. $12\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{7}x - \frac{5}{49}\right) - 1\frac{1}{5} \cdot \left(3\frac{1}{3}x + \frac{5}{12}\right) = 2\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

21. $-\frac{6}{7} \cdot (1,4x - 0,7) - \frac{3}{8} \cdot (1,6x + 6,4) = -\frac{3}{4} \cdot (1,2x - 2,4)$

22. $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} (x + 2) + 4 \right) + 6 \right) + 8 \right) = 1$

23. $\frac{3x + 4}{7} - \frac{9x + 44}{5} + \frac{3(3x + 10)}{4} = \frac{5x + 12}{3}$

24. $x + \frac{x + 3}{2} = 2x - \left(1 - \frac{6 - 2x}{3}\right)$

25. $3\frac{5}{6} - \frac{2x - 3}{9} = \frac{1 - \frac{2x - 3}{9}}{2} + \frac{7}{18}x$

26. $\frac{7x - \frac{2 + x}{5}}{3} + \frac{\frac{5 - x}{3} - x - 4}{5} = 2x - 0,6$

Линейные уравнения. Часть 2

Решите уравнения

1. $2x(3x - 2) - 3(1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2}) = 13$

2. $(2x^2 + 2x + 1)(x + 3) + (2x^2 + 2x + 3)(x + 2) = (2x^2 + 2)(x + 1) + 2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

3. $\frac{(x + 1)x}{3} - (\frac{x}{4} - 1)(2 + x) = -\frac{x}{3} \cdot \frac{8 - x}{4}$

4. $(6x - 7)(x - 9) + (9 - x)(-x - 5) = 0$

5. $(9x + 7)^2 = (3x - 2)(9x + 7)$

6. $(\frac{1}{25 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{29 \cdot 30}) \cdot 150 + 1,03 : (10,3 \cdot (x - 1)) = 11$

7. $1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 2016))) = 1,2^2$

Домашнее задание к 23.11.2021

8. $\frac{x(x + 3)}{4} + \frac{(x - 2)(x + 1)}{3} = \frac{x(5 - \frac{x - 3}{2})}{6} + \frac{1}{6}$

9. $(4p + 1)(16p^2 - 4p + 1) - 16p(4p^2 - 5) = 21$

10. $8x^2 - 1 - (4x + 1)(x - 2) = -(2x - 1)(-1 - 2x)$

11. $(2x - 1)(3x - 7) = (2x - 1)(x + 1)$

Линейные уравнения. Домашнее задание к 19.11.2021

Решите уравнения

1. $\frac{3x - 10}{5} + \frac{4x + 1}{7} - \frac{2 - 4x}{9} = 1\frac{11}{35}x$

2. $-5(0,7x + 9) - 4(0,3x - 0,6) = -6(x + \frac{7}{20})$

3. $-12x^2 + 30x - 21 = (3x - 7)(4x + 3) + (6x + 5)(3 - 4x)$

4. $\frac{(x - 2)(3x + 5)}{3} - \frac{(x + 1)(5x - 2)}{5} = \frac{(5x + 2)(x - 1)}{5} - \frac{(3x - 5)(x + 2)}{3}$

Линейные уравнения с модулем

Решите уравнения

1. $|x + 12| = |x - 10|$
2. $|2x - 6| = |-x - 8|$
3. $(4x - 13)^2 = (-2x + 9)^2$
4. $-10x + 2|x| - 9 = 0$
5. $5x^2 - |x| = 0$
6. $(4x - 6)^2 = (-3x - 7)^2$
7. $-|s + 5| = |-s - 5|$
8. $|15 - t| = |t - 15|$
9. $-|10b - 27| = |20 - 4b|$
10. $|7 - q| + |q - 6| = 4$
11. $|8 + t| - |4 - t| = -6$
12. $|2x + 2| - 1 = |2x + 1|$
13. $|6b - 4| - 2 = 3 + |2b + 9|$
14. $|x + 4| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| = 3$
15. $|2x + 6| - |3x - 9| + |5x + 5| + |4x - 6| = 5$
16. $|3b + 1| - |4 - 2b| - |6 - 12b| = |4b + 8| - 1$

Домашнее задание

17. $|4a - 5| = |3a + 6|$
18. $-|15 - t| = |t - 15|$
19. $(-5x - 11)^2 = (-2 - 4x)^2$
20. $5(x - 7|x| - 4) = |x|$
21. $|7 - q| + |q - 6| = 4$
22. $|3 - 2x| = \left| \frac{2x - 7}{5} \right|$
23. $|4c - 1| - |5c - 10| = |3c - 12| + |7c + 14| - 48$
24. $3 - |3 - 5t| = 4 - |5 - 5t|$
25. $|6z - 3| + 8 = 5 - |3 + z|$

Линейные уравнения с модулем. Часть 2

Решите уравнения

1. $|8 - |x + 2|| = 7$

2. $-|14 - 5n - 10 + 8n| = -|6 - 4n + n - 10|$

3. $|3m + 12| = -|8m + 3 - 9m - 7|$

4. $(7x + 1)^6 = (x - 2)^6$

5. $|x| = 4(x - 2|x| - 3)$

6. $|4z - 3| - 7 = 2 - |12 + 4z|$

7. Докажите, что данное уравнение имеет не менее 10 решений

$$|5x - 12| - |3x - 1| = |11 - 2x|$$

8. $|7t - 21| + |9t - 36| + |11t + 22| = -1$

9. $5|z + 3| + |2z - 7| - 6|z + 1| - 7|z + 2| = 9$

10. $|3x - 1| + (2x^2 - x - 1)^2 = 0$

11. $||3x + 2| - 4| = x$

Домашнее задание

12. $|x| - 5x = 6 - 2(x - 1)$

13. $|10 - |x - 1|| = 8$

14. $|6b - 4| - 2 = 3 + |2b + 9|$

15. $|5a - 20| + |9a - 4| + |6a + 1| + |7a + 15| = -12$

16. $3|y - 4| + 2|y + 3| + 2|2y - 3| - |5y + 8| = 4$

Уравнения с параметром

1. Найдите все целые значения коэффициента a , при которых корень уравнения $ax = -8$ является целым числом.
2. При каких значениях a уравнения имеют общий корень $5x-1 = 2a-2$ и $3x+2 = a+5$?
3. При каких значениях a уравнение $ax = 5$ имеет единственный корень; не имеет корней; имеет бесконечно много корней? **Решите уравнения с параметром**
4. $(a - 3)x = -1$
5. $(a + 1)x = a + 1$
6. $(a - 2)x = (a - 2)a$
7. $kx = k^2 - 4k$
8. $mx = m^2 - 5m + 6$
9. $(2a - 1)x = 2a^2 - 5a + 2$
10. $(3a - 1)(a + 2)x = 9a^2 - 1$
11. $8 = ax - 3a$
12. $9 + 2(x + 5a) = 10a + 9$
13. $7ax - 56x + 5 = 0$
14. $3(ax + 4) + 2a = 3(2ax - 1) - 4$

Домашнее задание

15. Найдите значение a , при котором уравнение $ax - 3 = 2x - 1$: **(а)** имеет корень, равный 4; **(б)** не имеет корней; **(в)** имеет бесконечно много корней.
16. $c(1 + x) + 3 = 3x + cx$
17. $cx + 7 = 3x + c$
18. $5 - 2cx = 2(7 + x)$
19. $ax + 2 = 3(4 - x)$
20. $ax - 2x = a^2 + a - 6$

Текстовые задачи

1. Первоначально на овощной базе хранилось 150 тонн картофеля и 60 тонн капусты. С базы каждый день вывозили по грузовику овощей. Общая масса овощей в грузовике была одной и той же, но картофеля вывозили в 3,5 раза больше, чем капусты. Через 12 дней картофеля и капусты на базе стало поровну. Сколько тонн овощей вывозили с базы ежедневно?
2. В пансионате в прошлом году отдыхало 1100 мужчин и женщин. В этом году число отдыхающих мужчин уменьшилось на 20%, а число женщин увеличилось на 30%. Сколько мужчин и сколько женщин отдыхало в пансионате в этом году, если всего в этом году отдыхало 1130 человек?
3. Имеются два сосуда емкостью 1 л и 2 л. Из содержимого приготовили 0,5 л смеси, содержащей 40% яблочного сока, и 2,5 л смеси, содержащей 88% яблочного сока. Каково процентное содержание яблочного сока в сосудах?
4. Из Москвы в Санкт-Петербург, удаленные друг от друга на 715 км, отправились товарный и пассажирский поезда, причем скорость товарного поезда на 50 км/ч меньше скорости пассажирского. Пассажирский поезд, доехав до Санкт-Петербурга, развернулся и поехал назад, встретив товарный через 6 ч 30 мин после своего выхода из Москвы. На каком расстоянии от Санкт-Петербурга произошла встреча?
5. Двое друзей сделали 29 бумажных самолетиков. Первый делал 3 самолетика каждые 2 минуты, а второй – 2 самолетика каждые 3 минуты. Сколько самолетиков сделал каждый, если второй работал на 11 минут дольше?
6. Имеется 2 сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, а второй – 30%. Из этих двух сплавов получили третий сплав, массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?
7. Из А в В выехал грузовик со скоростью 45 км/ч. После того как грузовик проехал 15 км, из города А выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч, который приехал в город В на 10 минут раньше грузовика. Найдите расстояние между городами.
8. Пешеход сначала спускался со скоростью 4 км/ч, затем поднимался в гору со скоростью 3 км/ч. Найдите общий путь, проделанный пешеходом, если спуск был на 5 км длиннее подъема, а затраченное на весь путь время равно 3 часа.
9. Группа туристов отправляется на лодке от лагеря по течению реки с намерением вернуться обратно через 5 часов. Скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость лодки 8 км/ч. На какое наибольшее расстояние по реке они могут отплыть, если перед возвращением они планируют побыть на берегу 3 часа?
10. Поезд, двигаясь со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 21 с. Найдите длину поезда в метрах.
11. Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы её за 24 дня, 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы её за 96 дней?

12. Семиклассники пьют сок постоянно и равномерно, скорость выпивания сока у разных семиклассников одинаковая. В полдень семиклассник Гриша вернулся из магазина, держа в руках литр сока. В 13:00 к нему пришёл одноклассник с литром сока, и они стали пить сок вдвоём. В 14:00 пришёл ещё один одноклассник с литром сока, и т. д. — каждый час приходил новый одноклассник с литром сока, и все они оставались. В 19:30 весь сок закончился, и компания разошлась. А в какой момент времени у них было больше всего сока? (Укажите все такие моменты и докажете, что других нет.)
13. ОПЧ (очень противное число) равно

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{100}}}}}}. \quad (1)$$

Гриша делает ОПО (очень противную операцию) с выбранным числом: сначала он из единицы вычитает выбранное число, а потом переворачивает получившуюся дробь. Гриша проделывает ОПО с ОПЧ и получает число номер 1. Потом он проделывает ОПО с числом номер 1 и получает число номер 2. После этого он проделывает ОПО с числом номер 2 и получает число номер 3... В конце концов он получает число номер 1000. Может ли среди 1000 выписанных чисел быть больше трех попарно различных?

Формулы сокращенного умножения

Упростите выражение

1. $(a - b)(a + b)$

2. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Разложите на множители

4. $a^2 + 2ab + b^2$

5. $a^2 - 2ab + b^2$

6. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Раскройте скобки

8. $(a - 7b + 3c) \cdot (a + 7b - 3c)$

9. $(a + b + c + 5) \cdot (a - b + c + 3)$

Упростите выражение

10. $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(x - 1)$

Формулы сокращенного умножения

Упростите выражение

- $(\frac{3}{4}y + 2, 5)(\frac{3}{4}y - 2, 5)$
- $(2, 5a^3 - 3b^4)(2, 5a^3 + 3b^4)$
- $(-5n + 3p^2)(3p^2 + 5n)$
- $(-4m^4 - 3n^2)(-4m^4 + 3n^2)$
- $(m^3n - p^k)(p^k + m^3n)$
- $(3p^{3m-2} + 2q^{2n-3})(3p^{3m-2} - 2q^{2n-3})$
- $(1 + 4p^2)(2p + 1)(1 - 2p)$
- $(x - y - 3)(x - y + 3)$
- $(x - y - 3)(x - y + 3)$
- $(2a + 7b)^2$
- $(4m - 1\frac{1}{2}n)^2$
- $(\frac{2}{5}a^4 + \frac{1}{2}a^3)^2$
- $\frac{1}{2}(10m - 1)^2 - 20m$
- $(3 + 5x)^2 - 9$
- $(p + 6)(6 - p) + (p + 2)^2$
- $(1 - 2y)^2 - (2y - 3)(2y + 3)$
- $(p^2 - 2k)^3$
- $-2(x^{n+1} - x^{n-1})^3$
- $(x + y)^3 - (x - y)^3$
- $(2x - 5)^3 - 2x(2x - 1)(2x + 1)$
- $(2a + 3b + 4c)^2$
- $(p - 2x + 5)^2$
- $(2a - 3b + c^2 - d)^2$
- $(c^2 + 2c + 3)^2 + (c^2 - 2c - 3)^2 - 2(c^2 + 2)^2$

Решите уравнения

25. $(6 - 5m)^2 - 10m(2.5m + 1) = 8$

26. $32 + (2k + 1)^2 = (2k - 3)^2$

27. $\frac{(2a + 1)^2}{4} - \frac{(3a - 2)^2}{9} = 1$

28. $(3x + 2)^2 - 27x^2(x + 2) = 12$

Докажите тождество

29. $x(y + z)^2 + y(z + x)^2 + z(x + y)^2 - 4xyz = (x + y)(y + z)(z + x)$

30. Докажите, что если $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$,
то $x = y = z$

Домашнее задание

31. $(\frac{2}{3}ax^3 + 0, 8b^2y)(0, 8b^2y - \frac{2}{3}ax^3)$

32. $(2x^{4n+5} - 5y^{4n-5})(2x^{4n+5} + 5y^{4n-5})$

33. Решите уравнение: $9m + 8m(5 - 2m) = 9m^2 - (5m + 7)(5m - 7)$

34. $(2x^n + y^k)^2$

35. Решите уравнение: $(x + 5)^2 + 1 = \frac{(6x - 1)^2}{36}$

36. $(3m - n - k)^2 + 2(3mn + 3mk - nk)^2$

37. $(-0.5 + p)^3$

38. $(p + q)^3 - p(p - q)^2$

39. Решите уравнение: $27x^2(1 - x) = (1 - 3x)^3$

Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения

Представьте в виде произведения

1. $9m^2n^2 - 1$
2. $0,04k^2 - 2\frac{7}{9}m^4p^6$
3. $4x^{2n-6} - 9y^{2n+6}$
4. $(3a + 1)^2 - 4$
5. $9a^2 - 16(4a - 3)^2$
6. $4(3x - 2y)^2 - 9(4x + 3y)^2$
7. $16x^2 + 81y^2 - 72xy$
8. $44bc + 121b^2 + 4c^2$
9. $9x^6 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{16}$
10. $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$
11. $8y^3 + 27$
12. $m^6 - n^3$
13. $x^{3n-3} - y^{3n+3}$

Представьте в виде многочлена

14. $(4a + 5b)(16a^2 - 20ab + 25b^2)$
15. $(5m - 3n)(25m^2 + 15mn + 9n^2)$
16. $(\frac{1}{3} - 2a)(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2)$
17. Представьте в виде квадрата трехчлена: $x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y$
18. Докажите, что при любых a, b и c много член принимает неотрицательные значения $a^2 + 9b^2 + c^2 - 6ab - 2ac + 6bc$
19. Докажите, что значение выражения кратно $625 \cdot 638^3 + 612^3$
20. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 1)^2 - (5n - 1)^2$ кратно 20
21. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(6^n \cdot 2^{2n} - 1)$ кратно 23

22. В работах Леонардо Эйлера используется тождество $(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = (pr + cqs)^2 + c(ps - qr)^2$. Докажите его.

Домашнее задание

23. $100x^4 - 9y^{10}$
24. $0,49a^{6-2p} - 0,81b^{4p+2}$
25. $100 - (10 - n)^2$
26. $4y^2 - 9(5y - 1)^2$
27. $100(6a + 3b)^2 - 81(3a + 2b)^2$
28. $16 - 8ab + a^2b^2$
29. $36 + 8k + \frac{4}{9}k^2$
30. $p^3 + \frac{1}{27a^3}$
31. $m^3n^{12} - a^9$
32. $(\frac{1}{2} + 2k)(\frac{1}{4} - k + 4k^2)$
33. $(3p - \frac{1}{3})(9p^2 + p + \frac{1}{9})$

Формулы сокращенного умножения. Продолжение.

Вычислите рациональным способом

1. $45^2 + 35^2 + 2 \cdot 45 \cdot 35$
2. $27 \cdot 130 - 65^2 - 27^2$
3. $\frac{65^2 - 91^2}{26}$
4. $\frac{57^2 - 33^2}{43^2 - 67^2}$
5. $\frac{73^3 - 37^3}{36} + 73 \cdot 37$
6. $\frac{65^2 - 32^2 - 97 \cdot 11}{61^2 - 36^2} + \frac{56^2 - 26^2}{66^2 - 16^2}$
7. $\frac{1}{2} + \frac{53^2 - 27^2}{31^2 - 25} - \frac{53^2 - 27^2}{58^2 - 22^2}$
8. $\frac{53^2 + 22^2 - 47^2 - 16^2}{65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 59 + 59^2}$
9. $\frac{(94,5^2 - 30,5^2) : (\frac{69^3 + 29^3}{98} - 69 \cdot 29)}{(133,5^2 - 58,5^2) : (\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41)}$
10. $480^3 - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 - 479^3$
11. Какое число больше и на сколько процентов: $A = \frac{(7^{10} - 7^9 - 7^8)^2}{41 \cdot 49^8}$ или $B = 5379^2 - 5378 \cdot 5380$
12. Докажите, что выражение $9x^2 + 8y - 6xy + y^2 + 18 - 24x$ принимает положительные значения при любых значениях x и y .

Домашнее задание

13. $\frac{73^2 - 54^2}{19}$
14. $\frac{83^2 - 19^2}{39^2 - 25^2}$
15. $\frac{32^3 + 17^3}{49} - 32 \cdot 17$
16. $39 \cdot 54 + 27^2 + 39^2$
17. $\frac{77^3 - 69^3}{70^2 - 62^2} - \frac{77^3 + 41^3}{125^2 - 49} - \frac{1}{2}$
18. $\frac{119^2 - 2 \cdot 119 \cdot 96 + 96^2}{92^2 + 46^2 - 23^2 - 69^2}$

19.
$$\frac{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152,5^2 - 27,5^2)}{(26,5^2 - 17,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33\right)}$$

20. Какая из дробей больше: $\frac{102^2 - 98^2}{202^2 - 198^2}$ или $\frac{202^2 - 198^2}{302^2 - 298^2}$

Упрощение выражений

$$1. \frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

$$2. \frac{64a^2 - 16b^2}{4a^2 - 4ab + b^2}$$

$$3. \frac{x^2 - y^2 + 10x + 25}{x - y + 5}$$

$$4. \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a + b} \right) \cdot (a - b)$$

$$5. \frac{a^2b + b^2a}{a + b} \cdot \left(1 + \frac{1}{a^2 - ab} \right) - \frac{b}{a - b}$$

$$6. \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ac} : \frac{a + b}{ac + c^2} \cdot \frac{1}{a - b}$$

$$7. \left(\frac{2a - b}{a + b} - \frac{2b + a}{b - a} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{3} : (a^2 + b^2) \right)$$

$$8. \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4}$$

Упрощение выражений. Часть 2.

1.
$$\left(\frac{3a + 7b}{5a} + \frac{8a - 3b}{5b} \right) \cdot \frac{10ab}{7b^2 + 8a^2}$$

2.
$$\left(\frac{a - y}{a - b} - \frac{b - y}{a + b} \right) : \frac{1}{a^2 - b^2}$$

3.
$$\frac{\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y}}{\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y}}$$

4.
$$\frac{2ab - 3b - 10a + 15}{2ab - 8b} \cdot \frac{a^2 - 16}{b^2 - 25}$$

5.
$$\frac{3x - 9x^2}{x^2 + 9 + 6x} : \frac{1 - 9x^2}{x^2 - 9}$$

6.
$$\frac{1}{(m + n)^2} \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{(m + n)^3} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

7.
$$\left(\frac{x - 2}{3x + 6} + \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{x - 6}{6 - 3x} \right) \cdot \frac{9x^2 - 36}{32}$$

8.
$$\frac{r^3 + s^3}{r + s} : (r^2 - s^2) - \frac{rs}{r^2 - s^2} + \frac{2s}{r + s}$$

9.
$$\left(\frac{x - y}{xy} + \frac{3x + y}{x^2 - xy} + \frac{3y + x}{xy - y^2} \right) : \frac{2(x + y)}{xy} + \frac{2x}{y - x}$$

10.
$$\left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{x - y}{x^2 - xy} \right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x - y} \right)$$

11.
$$\frac{c^2 + 3c + 2}{c^2 + 7c + 12} : \frac{c^2 - 1}{c^2 - 9}$$

12.
$$\frac{2b + a - \frac{4a^2 - b^2}{a}}{b^3 + 2ab^2 - 3a^2b} \cdot \frac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{a^2 - b^2}$$

13.
$$\frac{9 - y^2}{y - 2} : \left(\frac{y - 2}{(y + 2)^2 - 2y} - \frac{1}{y - 2} + \frac{y^3 + 3y}{y^3 - 8} \right) \cdot \frac{y}{y + 3}$$

14.
$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x^3 + (a - 3)x^2 + (2 - 3a)x + 2a} \cdot \frac{x^2 + (a - 2)x - 2a}{49 - x^2}$$

Упрощение выражений. Часть 3.

$$1. \frac{t^5 + \frac{64}{t}}{t^3 - 4t + \frac{16}{t}} : \frac{t^2 + 4}{2}$$

$$2. \left(\frac{4x + 12}{x^2 - 3x} + \frac{x}{9 - x^2} \right) \cdot \frac{x + 3}{x + 6} - \frac{5}{x - 3}$$

$$3. \left(a + \frac{ab}{a - b} \right) \cdot \left(\frac{ab}{a + b} - b \right) : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$4. \left(\frac{a + 3b}{(a - b)^2} + \frac{a - 3b}{a^2 - b^2} \right) : \frac{a^2 + 3b^2}{(a - b)^2}$$

$$5. \left(\frac{3x}{x^3 - 27} + \frac{1}{x - 3} \right) \cdot \frac{x^3 - 3x^2}{(x + 3)^2} + \frac{3x + 9}{x^2 + 3x + 9}$$

6. Найдите все натуральные значения n , для которых число

(а) $n^4 + n^2 + 1$,

(б) $n^4 + 4$

является простым.

Упрощение выражений. Часть 3.5.

$$1. \frac{2x^2}{x^2 - a^2} + \frac{a}{x + a} + \frac{x}{a - x}$$

$$2. \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot ((x - y)^2 + xy) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot ((x + y)^2 - xy)$$

$$3. \frac{2m - 3n}{m - n} \cdot \left(\frac{2m}{13} + \frac{3n}{13}\right) + \frac{3m - 2n}{m - n} \cdot \left(\frac{3m}{13} + \frac{2n}{13}\right)$$

Упрощение выражений. Практическая работа.

1. Упростите выражение

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ac} : \frac{a + b}{ac + c^2} \cdot \frac{1}{a - b}$$

2. Упростите выражение

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} : \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a - b} + \frac{3}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}$$

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{1}{ab}\right) + 3 \cdot \frac{a + b}{a^2 b^2}$$

4. x и y — различные числа, $x^2 - 2022x = y^2 - 2022y$. Найдите сумму чисел x и y .
5. (а) Представьте $2n^2 + 2(n + 1)^2$ в виде суммы двух квадратов.
(б) Пусть a , b и c — целые числа. Докажите, что если $a = b + c$, то $a^4 + b^4 + c^4$ — удвоенный квадрат целого числа.
6. Можно ли найти десять таких последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов равна сумме квадратов следующих за ними девяти последовательных натуральных чисел?
7. Найдите все натуральные значения n , для которых число $n^5 + n + 1$ является простым.

Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$

Разложите на множители

1. Разложите на 2 множителя: (а) $a^3 - b^3$ (б) $a^4 - b^4$ (в) $a^n - b^n$ (г) $a^n + b^n$
Всегда ли это возможно?
2. $a^7 - 128$
3. $m^{10} + n^5$

Докажите, что при любом натуральном n значение выражения

4. $19^{2n+1} + 1$ кратно 20
5. $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n}$ кратно 9
6. Докажите, что число является составным: $2^{1234} + 1$
7. Упростите выражение: $3^{99} + 3^{98} \cdot 2 + 3^{97} \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$
8. Известно, что n и a - натуральные числа ($n > 1$), а значение выражения $a^n - 1$ является простым числом. Найдите a .
9. Дано число 100...01, число нулей в нем равно 22. Докажите, что это число составное.
10. Сократите дробь:
$$\frac{y^2 - y + 1}{y^8 - y^7 + y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1}$$
11. Докажите, что если многочлен $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})$ привести к стандартному виду, то все степени x окажутся четными.

Домашнее задание

12. Разложите на множители: $m^7 n^{14} k^{21} + 1$ Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:
13. $27^n + 12$ кратно 13
14. $8^n + 15^n - 2$ кратно 7
15. $21^n + 4^{n+2}$ кратно 17
16. Докажите, что значение выражения $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \dots + 30^{101}$ делится нацело на 31

Алгебраические преобразования

1. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 5$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?
2. Известно, что $a + b = 1$, а $ab = 2$. Вычислите
 - (а) $a^2 + b^2$;
 - (б) $a^3 + b^3$;
 - (в) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
3. Найдите $x^3 + y^3$, если известно, что $x + y = 5$ и $x + y + x^2y + xy^2 = 24$.
4. Известно, что $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Верно ли, что $a = b$?
5. Найдите $x + y$, если $x^3 + y^3 = 9$, а $x^2y + xy^2 = 6$.
6. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найдите значение выражения

$$(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

7. (а) Числа $a, b, \frac{ab}{a+b}$ — натуральные. Докажите, что число $\frac{a^2 + b^2}{a+b}$ — тоже натуральное.
(б) Числа $a, b, c, \frac{ab + bc + ac}{a + b + c}$ — натуральные. Докажите, что число $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ — тоже натуральное.
8. Известно, что $a + b + c + d = 6$. Может ли сумма $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ равняться 18?
9. Найдите значение выражения:

$$\frac{(2+3) \cdot (2^2+3^2) \cdot (2^4+3^4) \cdot \dots \cdot (2^{512}+3^{512}) + 2^{1024}}{3^{1024}}.$$

Формулы сокращенного умножения. Обобщение.

1. Решите уравнения: **(а)** $(x+1)(x^2-x+1)-x(x+2)(x-2)=3$ **(б)** $x^3-8=2x(x-2)$
2. Разложите на множители многочлен: **(а)** $x^4+2x^2y+4y-4$ **(б)** $(m+n-k)^3-m^3-n^3+k^3$
3. При каких значениях переменных многочлен принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение: $x^2+4xy+5y^2+4y+2$
4. Пусть $x-y=1$. Докажите, что $x^3-y^3=1+3xy$
5. Упростите выражение: $6a + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$
6. Вычислите: $\frac{3,17^2 - 2 \cdot 3,17 \cdot 1,17 + 1,17^2}{6,75^2 - 3,25^2}$

Тренировочное домашнее задание

- Решите уравнение:
 - $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) - 2x(x + 1)(x - 1) = 181;$
 - $8x^3 + 1 = x^2 + x + 0,25.$
- Разложите на множители:
 - $4x^2 - 3y^2 - 4xy + 4y - 1;$
 - $x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27}.$
- Найдите наибольшее значение выражение и значения переменных, при которых оно принимается: $xу + x - y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$
- Известно, что $a + b = -2$, $ab = -35$, чему может равняться $(a - b)^2$? А чему может равняться $(a - b)$?
- Упростите выражение: $\left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{x - y}{x^2 - xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x - y}\right).$
- Вычислите рациональным образом: $\left(\frac{83^3 + 97^3}{180} - 83 \cdot 97\right) : (35^2 - 28^2).$

График линейной функции

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:
 - (а) $(0; 0)$ и $(2; 1)$
 - (б) $(5; 4)$ и $(4; 3)$
 - (в) $(-1; 5)$ и $(2; 4)$
 - (г) $(3; -4)$ и $(3; 3)$
2. Найдите точку пересечения прямых:
 - (а) $y = 2x + 1$ и $y = 3x - 5$
 - (б) $y = 1$ и $y = 2,3x - 10,5$
 - (в) $y = \frac{7x - 2}{5}$ и $y = \frac{3x - 2}{4}$
 - (г) $y = 4x + 3$ и $y = 4x - 5$
3. Алина построила на плоскости график функции $y = kx + b$
 - (а) Варвара хочет построить график $y = kx + b - 2$. Как он будет расположен относительно Алининого?
 - (б) Ольга хочет построить график $y = kx + b + 1$. Как он будет расположен относительно Алининого?
 - (в) Лена хочет построить график $y = k(x + 1) + b$. Как он будет расположен относительно Алининого?
 - (г) Ульяна хочет построить график $y = k(x - 11) + b$. Как он будет расположен относительно Алининого?
 - (д) Тоня хочет построить график $y = -kx - b$. Как он будет расположен относительно Алининого?
 - (е) Анастасия хочет построить график $y = 2kx + b$. Как он будет расположен относительно Алининого?
4. Постройте график прямой:
 - (а) параллельной $y = -x + 1$, проходящей через точку $(0; 0)$.
 - (б) параллельной $y = 2x + 4$, проходящей через точку $(3; 2)$.
5. Постройте график прямой:
 - (а) перпендикулярной $y = -x + 1$, проходящей через точку $(0; 0)$.
 - (б) перпендикулярной $y = 2x + 4$, проходящей через точку $(3; 2)$.

График линейной функции. Продолжение.

1. Постройте график функции $y = 2x - 7$. Найдите функцию, график которой
 - (а) находится на 3 выше данного;
 - (б) находится на 2 ниже данного;
 - (в) находится на 2,5 левее данного;
 - (г) находится на 5 правее данного;
 - (д) параллелен данному и проходит через точку $(2; -4)$;
 - (е) перпендикулярен данному и проходит через точку $(2; -4)$.
2. Постройте все прямые
 - (а) образующие с $y = -x + 1$ угол в 45° и проходящие через точку $(0; 0)$. Также запишите уравнения этих прямых.
 - (б) образующие с $y = 2x + 4$ угол в 60° и проходящие через точку $(1; 1)$.
3. Прямая проходит через точки
 - (а) $(0; 0)$, $(a; -4a)$;
 - (б) $(0; 2)$, $(a; 2a + 3)$ и $(-a; -a)$;
 - (в) $(1; 0)$, $(a; a)$ и $(-a; -a - 4)$Каким может быть ее уравнение?

Кусочно-линейные функции

1. Постройте график функции: **(а)** $y = (2x - 1)^3 + (x + 2)^3 + (3x - 2)^2 - 9x^3 - 3x^2 - 10$

(б) $y = x + \frac{x+1}{x+1}$ **(в)** $y = 6 - \frac{x(x-3)}{x-3}$ **(г)** $y = \frac{2x-4x^2}{2x-1}$ **(д)** $y = \frac{9-4x^2}{2x+3}$

2. Функция $y = f(x)$ задана кусочно:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 18, & x \geq 6 \\ 4x - 8, & x < 6 \end{cases}$$

Найдите: **(а)** $f(10), f(8), f(6), f(4), f(-1), f(-2)$;

(б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 3; -12; 21; 32?

(в) Принадлежит ли графику этой функции точки $A(20; 72), B(-7; -36); C(15; -27)$

(г) Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

3. Функция $y = f(x)$ задана кусочно. Постройте ее график. Используя график, выясните, сколько точек пересечения может иметь этот график функции с прямой $y = a$.

(а)

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 2 \\ 2x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

(б)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - 1, & x \geq 3 \\ x - 2, & x < 3 \end{cases}$$

(в)

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq -1 \\ 4, & -1 < x < 2 \\ 0,5x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

(г)

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4, & x \leq -2 \\ x - 4, & -2 < x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Кусочно-линейные функции

1. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = 4x + 15$ и пересекает график функции $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

2. Постройте график функции: (а) $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ (б) $y = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$

3. Найдите все значения m , при каждом из которых прямая $y = (2m + 1)x + 1 - 4m$ проходит через точку пересечения прямых $y = \frac{x}{3} - 8,5$ и $y = -6x + 20$

4. Функция $y = f(x)$ задана кусочно. Постройте ее график. Используя график, выясните, сколько точек пересечения может иметь этот график функции с прямой $y = a$.

(а)

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 0,5 \\ 4x + 2, & -1,5 \leq x < 0,5 \\ -5 & x < -1,5 \end{cases}$$

(б)

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x \geq 2 \\ 2x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & -2 \leq x < 0 \\ 6 + 2x, & -4 \leq x < -2 \\ -x - 6, & x < -4 \end{cases}$$

(в)

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 5 \\ -x + 7, & 4 \leq x < 5 \\ x - 1, & 3 \leq x < 4 \\ -x + 5, & 2 \leq x < 3 \\ x + 1, & 1 \leq x < 2 \\ x + 3, & x < 1 \end{cases}$$

5. Прямая $y = (2a - 1)x + a + 3$ пересекает прямую $y = x + 8$ в точке M , сумма координат которой равна 6. Найдите возможные значения a .

Графики функций с модулями

Постройте график функции

1. $y = |x + 3|$

2. $y = |2x - 1|$

3. $y = |x + 3| + 1$

4. $y = 2|x + 3|$

5. $y = -|x + 3| - 1$

6. $y = |x + 1| - |x - 2|$

7. $y = |x - 3| + |1 - x|$

8. $y = |x| - x$

9. $y = x + |x + 2| - |x - 1|$

10. $y = |x + 1| - |5 - x|$

11.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

12. $y = |3x - 2| - 3$

13.

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 1, & \leq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Графики функций с модулями. Часть 2.

Постройте график функции

1. (а) $y = |2x + 1|$
(б) $y = -|2x + 1|$
(в) $y = |2x + 1| + 2$
(г) $y = |2x + 1| - 3$
(д) $y = ||2x + 1| - 3|$
(е) $y = |||2x + 1| - 3| - 2|$
(ж) $y = |||2(x + 1) + 1| - 3| - 2|$
(з) $y = |||2x + 6| - 3| - 2|$
2. $y = ||x + 1| - x|$
3. $y = |x| + |x + 1| + |x + 2| + |x + 3|$

Изображение множеств решений уравнений.

Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения:

1. $(x - 5)(x - 2y) = 0$
2. $x^2 - 4y^2 = 0$
3. $x - |y| = 0$
4. $\frac{x + 2y}{x + y} = 1$
5. $\frac{x - y + 6}{x - 2y} = 1$
6. $(x + 2)^2 + y^2 = 0$
7. $|x| + (y - 3)^2 = 0$
8. $xy - 2y = 0$
9. $|x - 4| + |y - 4| = 0$
10. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 0$
11. График уравнения проходит через точку А. Постройте этот график. **(а)** $(a + 2)x + (2a - 1)y = 5$, $A(2; 1)$ **(б)** $ax + 2y + x + 2y = 5a + 5$, $A(3; 1)$
12. При каком значении a множество решений уравнения: **(а)** $(a - 2)x + (2a - 6)y + 8 = 0$ является прямой, параллельной оси OX ? Изобразите это множество. **(б)** $(3a - 1)x + (a - 1)y - 6 = 0$ является прямой, параллельной оси OY ? Изобразите это множество. **(в)** $(2a - 6)x + (a - 3)y - 4a + 12 = 0$ является координатной плоскостью? **(г)** $(6 - 4a)x + (2a - 3)y + 3a = 0$ является пустым множеством?

Задачи с параметром

1. Найдите все значения параметра k такие, что график функции $y = (k^2 - 1)x + k$ параллелен графику функции $y = 3x + 2$.
2. Найдите все значения параметра k такие, что график функции $y = (k^2 - 2)x + k$ перпендикулярен графику функции $y = 3x + 2$.
3. Что объединяет графики функций $f(x) = ax + 4$?
4. Найдите все значения параметра k такие, что график функции:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 1 \\ 3, & -3 \leq x < 1 \\ x + 6 & x < -3 \end{cases}$$

имеет ровно 2 общие точки с прямой

(а) $y = kx$;

(б) $y = x + k$;

(в) $y = kx - 1$.

Параметр-2

1. Функция $y = f(x)$ задана кусочно. Постройте ее график. Используя график, выясните, сколько точек пересечения (в зависимости от a) может иметь этот график функции с прямой $y = a$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 1 \\ 4, & -2 \leq x < 1 \\ 2x - 5 & x < -2 \end{cases}$$

2. При каком значении a множество решений уравнения: **(а)** $(a^2 - 4)x + (2a - 4)y + 1 = 0$ является прямой, параллельной оси OX ? Изобразите это множество. **(б)** $(a - 1)x + (a^2 - 1)y + 2 = 0$ является прямой, параллельной оси OY ? Изобразите это множество. **(в)** $(a^2 - 5a + 4)x + (a - 4)y - 4a + 16 = 0$ является координатной плоскостью? **(г)** $(a^2 + 10a + 21)x + (2a + 6)y + 4a - 1 = 0$ является пустым множеством?

3. Постройте график функции $y = \frac{(x - 9)(x^2 - 9)}{x^2 - 6x - 27}$ и определите при каких значениях k построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$

4. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и определите при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с ним 2 общие точки.

5. Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и определите при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с ним ровно 1 общую точку.

6. Постройте график уравнения: **(а)** $(x^2 + x)(y - 5x) = 0$ **(б)** $\frac{(y^2 - 4)(y + x)}{x^2 - 1} = 0$ **(в)** $(\frac{y}{x - 2} - 2)(x - 2) = 0$

Графики. Повторение.

1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(2; -3)$ и $(-4; 6)$ и постройте ее график.
2. Определите, лежат ли точки $A(2; 11)$, $B(-1; -11)$, $C(123; 997)$ на одной прямой.
3. Постройте график функции $y = 3x - 1$. Постройте график функции, который
(а) параллелен данному и проходит через точку $(0; -3)$;
(б) перпендикулярен данному и проходит через точку $(0; -3)$.
4. Постройте график функции $y = |2x + 4|$. Найдите функцию, график которой
(а) находится на 1 выше данного;
(б) находится на 1 ниже данного;
(в) находится на 1 левее данного;
(г) находится на 1 правее данного;
5. Постройте все прямые образующие с $y = -x + 4$ угол в 45° и проходящие через точку $(0; 0)$. Также запишите уравнения этих прямых.

Системы уравнений

1. Решите систему

$$\begin{cases} 4x - 3y = -11, \\ 10x + 5y = 35. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} 11x + 2y = 2, \\ -5x + 6y = 6. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 4(3x - 4y) + 14 = 3(5x + 2y), \\ -2x(x - 6y) = 5(3x - 4y) - 1. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} 10x + 7y = -1, \\ 15x + 8y = 6. \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x + y^2 = (y + 3)^2 + 12. \end{cases}$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 0,2, \\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} = 1, \\ \frac{x-5}{3} - \frac{2-y}{2} = -\frac{7}{6}. \end{cases}$$

8. Решите систему

$$\begin{cases} 0,29x + 0,33y = 0,19(x + y + 10), \\ 0,29x + 0,33y + 5 = 0,39(x + y + 10). \end{cases}$$

Повторение

1. Решите уравнение: $2(x - 8)^3 = 8x - 64$
2. Среднее арифметическое десяти чисел равно 15. **(а)** К этому ряду приписали число 37. Чему теперь равно среднее арифметическое? **(б)** После из ряда убрали два числа и среднее арифметическое стало равно 14. Чему равняется среднее арифметическое убранных чисел?
3. Племя проглотитов купило на праздник торт. Ели они его так — к торту подходил один из проглотитов и съедал половину имевшегося на этот момент. Так поступили четверо проглотитов, а последнему — пятому отдали оставшиеся полкило торта. Сколько весил торт вначале?
4. Мальвина дала Буратино задание: «Сосчитай кляксы в своей тетрадке, прибавь к их числу 7, раздели на 8, умножь на 6 и отними 9. Если сделаешь всё правильно, получишь простое число». Буратино всё перепутал. Кляксы он подсчитал точно, но потом умножил их количество на 7, вычел из результата 8, затем разделил на 6 и прибавил 9. Какой ответ получился у Буратино?

Системы уравнений

1. Решите систему

$$\begin{cases} 6x - 3(4x + 1) - 7 = 4y - 5(y + 3) + 7, \\ 3y - \frac{1}{2}(x - 4) - 19 = 2x + \frac{1}{3}(x + 3y) - 4. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} 0,6(x - y) = 66,6, \\ 0,7(x + y) = 6,3. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2, \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{3y-4x} = -1 \\ 6x + 11y = 5 \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 0,2, \\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

6. Найдите координаты точек пересечения прямых $y = 8,79x - 0,03$ и $y = 7,29x + 0,022$.

7. При каком значении n значение дроби $\frac{3x + ny}{4}$, равно -3 , если при $n = 6$ значение дроби $\frac{nx + y}{3}$ равно 1 , а значение дроби $\frac{nx + 2y}{5}$ равно 0 ?

8. Подберите, если возможно, такое значение m , при котором данная система имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений

$$\begin{cases} y = 5x - 7, \\ y = mx + 3. \end{cases}$$

9. Решите уравнение: (а) $(5x - y)^2 + |x + y + 6| = 0$ (б) $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

Системы уравнений

1. Решите систему

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 20, \\ 5x - 3y - 5z = 1, \\ 7x - y - 6z = 0. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = -3, \\ 5x + 11y - 5z = 4, \\ 2x - 3y - z = 13. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 4, \\ 5x - 3y - 5z = 17, \\ 7x - y - 6z = 13. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = -8, \\ 5x + 11y - 5z = -1, \\ 2x - 3y - z = 12. \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} -2x + 4y + 3z = -7, \\ 4x + 3y - z = -5, \\ 2x - 5y - 3z = 11. \end{cases}$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z = 10, \\ -2x + y - 6z = -3, \\ x - 4y + 3z = 5. \end{cases}$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 2, \\ 5x + 3y + 6z = -5, \\ -2x - 4y + 3z = -3. \end{cases}$$

8. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 17y - 4z = -5, \\ 3x + 7y + 5z = -7, \\ 5x + 13y + 3z = 11. \end{cases}$$

9. Решите систему

$$\begin{cases} -17x + 4y + 8z = 33, \\ 7x - 2y - 11z = -14, \\ -13x + 3y + 17z = 13. \end{cases}$$

10. Решите систему

$$\begin{cases} 4x + 7y + 2z = -19, \\ 7x - 2y - 21z = 35, \\ -3x + 4y + 19z = -7. \end{cases}$$

11. Решите систему

$$\begin{cases} 5x - 3y + 14z = 16, \\ 6x - 2y + 7z = -9, \\ 17x + 4y + 3z = 16. \end{cases}$$

12. Решите систему

$$\begin{cases} 6x - 2y - 13z = 1, \\ 3x - y - 15z = 9, \\ 3x + 2y + 326z = 1000. \end{cases}$$

13. Решите систему

$$\begin{cases} 5x - 3y - 2z = 7, \\ 4x - 8y + 3z = 38, \\ 8x + 3y - 5z = 49. \end{cases}$$

14. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -7, \\ 7x + 11y + 13z = -5, \\ 17x + 19y + 23z = -1. \end{cases}$$

15. Решите систему

$$\begin{cases} 5x + 2y - 7z = -12, \\ 7x - 5y - 3z = 18, \\ 3x - 10y + 4z = 24. \end{cases}$$

Системы уравнений

1. Решите уравнение: **(а)** $|2x+y|+(x-y-4)^2=0$ **(б)** $(x-3y+1)^2+(6x+y-13)^2=0$
(в) $x^2+4y^2-2x+4y+2=0$

2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 0, \\ 3xy + x + 2y = 5. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + |y + 1| = 0, \\ 5x + xy - 4y - 8 = 0. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - xy = 0, \\ 2x + 11y = 8. \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} (5x + y)^2 = 4, \\ 7x - y = 2. \end{cases}$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} 36x^2 - 12xy + y^2 = 25, \\ x^2 + 4xy + 4y^2 = 1. \end{cases}$$

8. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

9. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7, \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1. \end{cases}$$

10. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{3}{x-y} + \frac{5}{x+y} = 11, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{3}{x+y} = -1. \end{cases}$$

11. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13, \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1. \end{cases}$$

12. Решите систему

$$\begin{cases} 3|x| + 5|y| = 8, \\ 4|x| - 11|y| = -7. \end{cases}$$

13. Решите систему

$$\begin{cases} |x+6| + |y-5| = 6, \\ 6|x+6| + 5|y-5| = 31. \end{cases}$$

Домашнее задание

14. Решите уравнение: $25x^2 + 49y^2 + 20x - 14y + 5 = 0$

15. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 16y^2 = 9, \\ x + 4y = -3. \end{cases}$$

16. Решите систему

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = 25, \\ 2x + y = 11. \end{cases}$$

17. Решите систему

$$\begin{cases} 25x^2 - 10xy + y^2 = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

18. Решите систему

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 8, \\ 9x^2 - 6xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

19. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4. \end{cases}$$

20. Решите систему

$$\begin{cases} 5|x| + 3|y| = 1, \\ 2|x| + 7|y| = 12. \end{cases}$$

21. Решите систему

$$\begin{cases} 3|x+7| + 11|y-2| = 25, \\ 4|x+7| - 3|y-2| = 7. \end{cases}$$

Системы уравнений

1. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{11}{x} + \frac{6}{y} = 28, \\ \frac{7}{x} - \frac{15}{y} = -1. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{3}{x+y} = 10, \\ \frac{9}{x-y} - \frac{2}{x+y} = 5. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 17, \\ |x| - |y| = -7. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

5. (а) Изобразите Q — множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $|x| + |y| = 2$

(б) Докажите, что у системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ y = ax. \end{cases}$$

два решения при любом значении a .

(в) Решите систему

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ y = x + a. \end{cases}$$

в зависимости от a .

6. (а) Изобразите G — множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $|x| - |y| = 2$

(б) Решите систему

$$\begin{cases} |x| - |y| = 2, \\ y = ax. \end{cases}$$

два решения при любом значении a .

(в) Решите систему

$$\begin{cases} |x| - |y| = 2, \\ y = x + a. \end{cases}$$

в зависимости от a .

Решение задач с помощью систем уравнений

1. Имеются два слитка. В первом 270 г золота и 30 г меди, во втором 400 г золота и 100 г меди. Сколько надо взять каждого из слитков, чтобы получить 400 г сплава 825-й пробы?
2. Чтобы изготовить 290 деталей, 2 рабочих работали вместе 4 ч, и, кроме того, первый работал еще $3\frac{1}{2}$ ч. Если бы они вместе работали 5 ч, то оставшуюся часть второй рабочий закончил бы за $2\frac{1}{2}$ ч. Сколько деталей в час делал каждый рабочий?
3. От турбазы до озера 8 км. Дорога сначала идет в гору, затем лесом, потом под гору. До озера туристы шли 1 ч 27 мин, а обратно — 1 ч 51 мин. Скорость их движения в гору — 4 км/ч, лесом — 5 км/ч, а под гору — 6 км/ч. Сколько километров шли туристы лесом в одном направлении?
4. Для содержания лошадей был сделан запас корма на определенное время. Если бы лошадей было на 2 меньше, то сена хватило бы еще на 10 дней, а если бы их было на 2 больше, то не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней запас?
5. Четыре человека купили лодку. 1-й внес половину суммы, вносимой остальными; 2-ой — $\frac{1}{3}$ суммы, вносимой остальными; 3-й — $\frac{1}{4}$ суммы, вносимой остальными, а 4-й — оставшиеся 13 руб. Сколько стоит лодка и сколько внес каждый?

Множества на плоскости

Нарисуйте на координатной плоскости множество точек (x, y) , удовлетворяющее следующему уравнению.

1. $|x| + |y| = 5$
2. $|2x| + |3y| = 6$
3. $|4x| + |y - 1| = 8$
4. $2|x - 2| + 5|y + 3| = 10$
5. $|2x - 1| + |4y + 1| = 9$
6. $|3x - 2| + |4y + 3| = 7$
7. $|x| - |y| = 5$
8. $|7x| - |2y| = 14$
9. $|x + 2| - |5y| = -10$
10. $3|x + 1| - 4|y - 3| = 6$
11. $|3x + 4| - |4y + 3| = 10$
12. $|5x - 3| - |4y + 5| = -9$

Повторение

Решите уравнение, разложив на множители или докажите, что решений нет

1. $x^2 + 7x + 6 = 0$
2. $x^2 - 9x + 18 = 0$
3. $x^2 + 5x + 7 = 0$
4. $6x^2 - 7x + 1 = 0$
5. $7x^2 + 15x + 8 = 0$
6. $16x^2 + 2x + 1 = 0$
7. $2x^2 + 5x + 4 = 0$
8. $4x^2 + 3x - 14 = 0$
9. $x^2 - (n + 1)x + n = 0$
10. $x^2 + (2n + 3)x + n^2 + 3n = 0$
11. $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
12. $-2x^2 - 3x + 3 = 0$
13. $x^2 - (k + 1)x + 2k - 2 = 0$
14. $x^2 + (3k + 2)x + 9k - 3 = 0$

Уравнения в целых числах

Решите уравнение в целых числах

1. $xy = x + y$
2. $xy = 2x + 3y$
3. $2xy - 4x + 3y = 0$
4. $3xy = 6x + 2y$
5. $y^2 + 4y = x^2 - 2x + 2$
6. $4x^2 + 4x = 9y^2 + 15$
7. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
8. $x^2 - 10xy + 24y^2 = 5$
9. $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 3$
10. $x^2 + 1 = 3y$

Повторение

Упрощение выражений

$$1. \left(x + \frac{3-x^3}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2+6x+9}$$

$$2. \frac{5a-6}{a+2} + \frac{a}{a+2} : \frac{a}{a^2-4} + \frac{10-3a}{a+2}$$

$$3. \left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1}$$

$$4. \left(\frac{2}{a-2} - \frac{8}{a^2-4} + \frac{-1}{a+2}\right)(a^2+4a+4)$$

$$5. \frac{2m}{m^2-4} - \frac{2}{m^2-4} : \left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{m-1}\right)$$

$$6. \left(\frac{a^2-ax}{x^2-2ax+a^2} - \frac{a^2x-ax^2-a^3}{x^3+a^3}\right) \frac{x^2-a^2}{2}$$